

KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Celou kapitolu najdete v zelené sbírce úloh z matematiky.

DEFINICE KOMPLEXNÍHO ČÍSLA

Komplexní čísla zavádíme jako uspořádané dvojice (a, b) reálných čísel a, b .

Množinu komplexních čísel značíme:

$$C = \{z = (a, b); a, b \in R\}$$

Číslo **a** se nazývá **reálná část** komplexního čísla z .

Číslo **b** se nazývá **imaginární část** komplexního čísla z .

Komplexním číslem rozumíme číslo, které lze zapsat ve tvaru $a + bi$, kde i je imaginární jednotka a a a b jsou reálná čísla.

$$\begin{array}{ccc} a & + & bi \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Reálná} & & \text{Imaginární} \\ \text{část} & & \text{část} \end{array}$$

ALGEBRAICKÝ TVAR KOMPLEXNÍHO ČÍSLA

Podobně jako reálná čísla můžeme komplexní čísla sčítat, odčítat, násobit a dělit.

Pro zavedení těchto operací je výhodné psát komplexní číslo $z = (a, b)$ v

algebraickém tvaru jako:

$$z = a + bi$$

i je zvláštní symbol, tzv. **imaginární jednotka**.

Komplexní číslo	Algebraický tvar	Popis částí
	$a + bi$	
$7i - 2$	$-2 + 7i$	Reálná část je -2 a imaginární část je 7 .
$4 - 3i$	$4 + (-3)i$	Reálná část je 4 a imaginární část je -3 .
$9i$	$0 + 9i$	Reálná část je 0 a imaginární část je 9 .
-2	$-2 + 0i$	Reálná část je -2 a imaginární část je 0 .

TYPY KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

Komplexní číslo $z = (a, 0) = a$ je **reálné číslo**.

Komplexní číslo $z = (0, b) = bi, b \neq 0$ je **ryze imaginární číslo**.

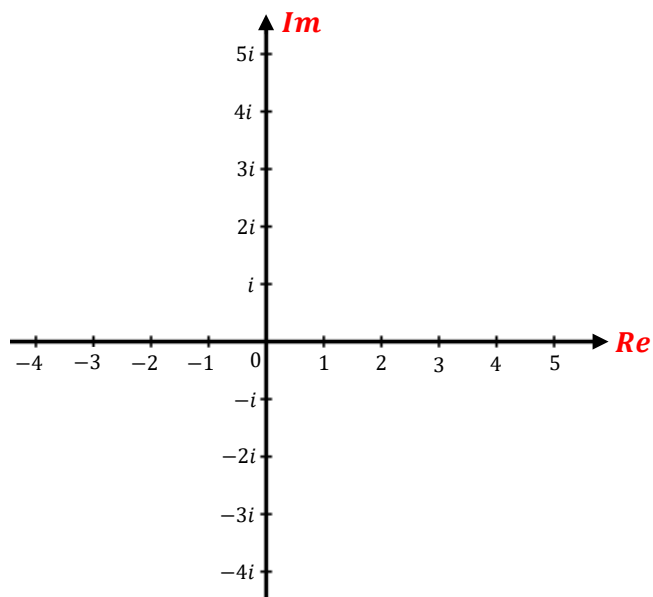
Komplexní číslo $z = (a, b) = a + bi, a \neq 0, b \neq 0$ je **imaginární číslo**.

Komplexní čísla	
$4 + 2i$	$-3 - \sqrt{5}i$
Reálná čísla	
$\sqrt{5}$	$-12,2 \quad 3$
Ryze imaginární čísla	
$\sqrt{5}i$	$-12,2i \quad 3i$

	Reálné ($b = 0$)	Ryze imaginární ($a = 0$)	Komplexní ($a + bi$)
$7 + 8i$ ($7 + 8i$)			X
$\sqrt{3}$ ($\sqrt{3} + 0i$)	X		X
1 ($1 + 0i$)	X		X
$-1,3i$ ($0 + (-1,3)i$)		X	X
$100i$ ($0 + 100i$)		X	X

GAUSSOVA ROVINA nebo komplexní rovina

Gaussova rovina je způsob zobrazení komplexních čísel.



Re je reálná osa

Im je imaginární osa

ABSOLUTNÍ HODNOTA KOMPLEXNÍHO ČÍSLA

Pro libovolné komplexní číslo $z = a + bi$ definujeme:

absolutní hodnotu komplexního čísla z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

KOMPLEXNÍ JEDNOTKA

Komplexní jednotka je komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna 1.

$$|z| = 1$$

Množina všech komplexních jednotek tvoří v **Gaussově rovině** jednotkovou kružnici se středem v počátku.

KOMPLEXNÍ ČÍSLO OPAČNÉ A ČÍSLO KOMPLEXNĚ SDRUŽENÉ

Pro libovolné komplexní číslo $z = a + bi$ definujeme:

opačné komplexní číslo k číslu z : $-z = -a - bi$,

komplexně sdružené číslo k číslu z : $\bar{z} = a - bi$ (čteme „ z s pruhem“).

ROVNOST, SOUČET, ROZDÍL, SOUČIN a PODÍL KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

Pro komplexní čísla $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ definujeme:

rovnost $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

součet $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

rozdíl $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

součin $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

podíl $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)}{(c+di)} = \frac{(ac+bd)}{(c^2+d^2)} + \frac{(bc-ad)}{(c^2+d^2)}i$

v případě podílu předpokládáme, že $z_2 \neq 0$ neboli $c^2 + d^2 \neq 0$.

Užitečná poznámka: Na součin můžeme pohlížet jako na násobení dvojčlenů dvojčlenem s tím, že využijeme vztahu $i^2 = -1$ a jeho definici si nemusíme pamatovat.

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - di^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Užitečná poznámka: Pro absolutní hodnotu komplexních čísel platí: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ a $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

MOCNINY IMAGINÁRNÍ JEDNOTKY

i^1	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8
i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1

Vyjádřeno matematickým vzorcem:

$$i^{4n} = 1$$

$$i^{4n+1} = i$$

$$i^{4n+2} = -1$$

$$i^{4n+3} = -i$$

GONIOMETRICKÝ TVAR KOMPLEXNÍHO ČÍSLA

Goniometrický tvar zdůrazňuje geometrické vlastnosti komplexního čísla, konkrétně jeho **absolutní hodnotu** (vzdálenost daného čísla od počátku v komplexní rovině) a **argument** (velikost úhlu, který svírá spojnice daného čísla a počátku v komplexní rovině s kladnou reálnou poloosou).

DEFINICE GONIOMETRICKÉHO TVARU KOMPLEXNÍHO ČÍSLA

Goniometrický tvar nenulového komplexního čísla z je výraz $|z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Reálné číslo α se nazývá **argument** komplexního čísla z .

Převod algebraického tvaru na goniometrický tvar:

$$z = a + bi = |z| \cos \alpha + |z|i \cdot \sin \alpha = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$a = |z| \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{a}{|z|}$$

$$b = |z| \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{b}{|z|}$$

Převod goniometrického tvaru na algebraický tvar:

$$z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha) = |z| \cos \alpha + |z| \sin \alpha \cdot i = a + bi$$

SOUČIN, PODÍL KOMPLEXNÍCH ČÍSEL V GONIOMETRICKÉM TVARU

Součin nenulových komplexních čísel $a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ a $b = |b|(\cos \beta + i \sin \beta)$ je komplexní číslo

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)].$$

Podíl nenulových komplexních čísel $a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ a $b = |b|(\cos \beta + i \sin \beta)$ je komplexní číslo

$$\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)].$$

MOIVREOVA VĚTA

Pokud je z komplexní jednotkou ($|z| = 1$), hovoříme o tzv. **Moivreově větě**.

Pro každé přirozené číslo n a každé reálné číslo α platí:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha).$$

UMOCŇOVÁNÍ KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

Mějme nenulové komplexní číslo $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ a přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$, pak **n-tá mocnina** komplexního čísla z je komplexní číslo

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n\alpha) + i \cdot \sin(n\alpha)].$$

EXPONENCIÁLNÍ TVAR KOMPLEXNÍHO ČÍSLA

V exponenciálním tvaru komplexního čísla se vyskytují stejné atributy daného čísla jako ve tvaru goniometrickém, a to **absolutní hodnota** a **argument**. Jde jen o jiný a kratší zápis, se kterým se dobře pracuje.

DEFINICE EXPONENCIÁLNÍHO TVARU KOMPLEXNÍHO ČÍSLA

Exponenciální tvar nenulového komplexního čísla z je výraz $|z|e^{i\alpha}$, kde číslo α je **argumentem** komplexního čísla z a $|z|$ je jeho **absolutní hodnotou**.

Přesné odůvodnění je poměrně složité, ale výsledný vztah je jednoduchý:

$$e^{i\alpha} = (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$$

Užitím této definice dostáváme rovnost mezi exponenciálním a goniometrickým tvarem:

$$|z| \cdot e^{i\alpha} = |z| \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$$

NÁSOBENÍ A DĚLENÍ KOMPLEXNÍCH ČÍSEL V EXPONENCIÁLNÍM TVARU

Součin nenulových komplexních čísel $a = |a|e^{i\alpha}$ a $b = |b|e^{i\beta}$ je číslo

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot e^{i(\alpha+\beta)}.$$

Podíl nenulových komplexních čísel $a = |a|e^{i\alpha}$ a $b = |b|e^{i\beta}$ je číslo

$$\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} \cdot e^{i(\alpha-\beta)}.$$

BINOMICKÁ ROVNICE

Binomickou rovnici se nazývá rovnice $x^n = a$, kde $a = |a| \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$, tj. $x^n = |a| \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$. V oboru komplexních čísel má tato rovnice právě n různých kořenů, a to $x_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot \left(\cos \frac{\alpha+2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\alpha+2k\pi}{n} \right)$, kde $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

ŘEŠENÍ KVADRATICKÉ ROVNICE V MNOŽINĚ $\mathbb{C}$

Kvadratická rovnice s neznámou x a reálnými koeficienty

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

nemá reálné kořeny v oboru reálných čísel, pokud diskriminant $D = b^2 - 4ac$ je **záporný**. Ale v oboru komplexních čísel má **dva komplexně sdružené kořeny**

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|} i}{2a}.$$