

KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Celou kapitolu najdete v zelené sbírce úloh z matematiky.

DEFINICE KOMPLEXNÍHO ČÍSLA

Komplexní čísla zavádíme jako uspořádané dvojice (a, b) reálných čísel a, b .

Množinu komplexních čísel značíme:

$$\mathbb{C} = \{z = (a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$$

Číslo a se nazývá **reálná část** komplexního čísla z .

Číslo b se nazývá **imaginární část** komplexního čísla z .

Komplexním číslem rozumíme číslo, které lze zapsat ve tvaru $a + bi$, kde i je imaginární jednotka a a a b jsou reálná čísla.

$$\begin{array}{ccc} a & + & bi \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Reálná} & & \text{Imaginární} \\ \text{část} & & \text{část} \end{array}$$

ALGEBRAICKÝ TVAR KOMPLEXNÍHO ČÍSLA

Podobně jako reálná čísla můžeme komplexní čísla sčítat, odčítat, násobit a dělit.

Pro zavedení těchto operací je výhodné psát komplexní číslo $z = (a, b)$ v

algebraickém tvaru jako:

$$z = a + bi$$

i je zvláštní symbol, tzv. **imaginární jednotka**.

Komplexní číslo	Algebraický tvar	Popis částí
	$a + bi$	
$7i - 2$	$-2 + 7i$	Reálná část je -2 a imaginární část je 7 .
$4 - 3i$	$4 + (-3)i$	Reálná část je 4 a imaginární část je -3 .
$9i$	$0 + 9i$	Reálná část je 0 a imaginární část je 9 .
-2	$-2 + 0i$	Reálná část je -2 a imaginární část je 0 .

TYPY KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

Komplexní číslo $z = (a, 0) = a$ je **reálné číslo**.

Komplexní číslo $z = (0, b) = bi, b \neq 0$ je **ryze imaginární číslo**.

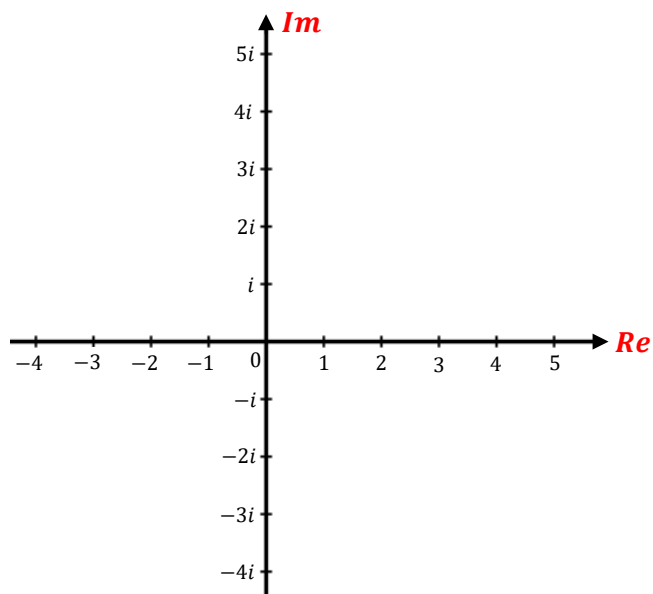
Komplexní číslo $z = (a, b) = a + bi, a \neq 0, b \neq 0$ je **imaginární číslo**.

Komplexní čísla	
$4 + 2i$	$-3 - \sqrt{5}i$
Reálná čísla	
$\sqrt{5}$	$-12,2 \quad 3$
Ryze imaginární čísla	
$\sqrt{5}i$	$-12,2i \quad 3i$

	Reálné ($b = 0$)	Ryze imaginární ($a = 0$)	Komplexní ($a + bi$)
$7 + 8i$ ($7 + 8i$)			X
$\sqrt{3}$ ($\sqrt{3} + 0i$)	X		X
1 ($1 + 0i$)	X		X
$-1,3i$ ($0 + (-1,3)i$)		X	X
$100i$ ($0 + 100i$)		X	X

GAUSSOVA ROVINA nebo komplexní rovina

Gaussova rovina je způsob zobrazení komplexních čísel.



Re je reálná osa

Im je imaginární osa

ABSOLUTNÍ HODNOTA KOMPLEXNÍHO ČÍSLA

Pro libovolné komplexní číslo $z = a + bi$ definujeme:

absolutní hodnotu komplexního čísla z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

KOMPLEXNÍ JEDNOTKA

Komplexní jednotka je komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna 1.

$$|z| = 1$$

Množina všech komplexních jednotek tvoří v **Gaussově rovině** jednotkovou kružnici se středem v počátku.

KOMPLEXNÍ ČÍSLO OPAČNÉ A ČÍSLO KOMPLEXNĚ SDRUŽENÉ

Pro libovolné komplexní číslo $z = a + bi$ definujeme:

opačné komplexní číslo k číslu z : $-z = -a - bi$,

komplexně sdružené číslo k číslu z : $\bar{z} = a - bi$ (čteme „z s pruhem“).

ROVNOST, SOUČET, ROZDÍL, SOUČIN a PODÍL KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

Pro komplexní čísla $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ definujeme:

rovnost $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

součet $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

rozdíl $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

součin $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

podíl $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)}{(c+di)} = \frac{(ac+bd)}{(c^2+d^2)} + \frac{(bc-ad)}{(c^2+d^2)}i$

v případě podílu předpokládáme, že $z_2 \neq 0$ neboli $c^2 + d^2 \neq 0$.

Užitečná poznámka: Na součin můžeme pohlížet jako na násobení dvojčlenů dvojčlenem s tím, že využijeme vztahu $i^2 = -1$ a jeho definici si nemusíme pamatovat.

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - di^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Užitečná poznámka: Pro absolutní hodnotu komplexních čísel platí: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ a $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

MOCNINY IMAGINÁRNÍ JEDNOTKY

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 = i^2 \cdot i^2 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 = -1$$

$$i^7 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i = -i$$

$$i^8 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 = 1$$

$$i^9 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i = i$$

$$i^{10} = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 = -1$$

$$i^{11} = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i = -i$$

$$i^{12} = 1$$

$$i^{13} = i$$

$$i^{14} = -1$$

$$i^{15} = -i$$

i^1	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8
i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1

Vyjádřeno matematickým vzorcem:

$$i^{4n} = 1$$

$$i^{4n+1} = i$$

$$i^{4n+2} = -1$$

$$i^{4n+3} = -i$$

Podrobné vysvětlení Komplexního čísla najdete na webu Khan Academy:

<https://cs.khanacademy.org/math/komplexni-cisla/x5a21ddc4c0c1b430:uvod-do-komplexnich-cisel/x5a21ddc4c0c1b430:co-jsou-to-komplexni-cisla/a/intro-to-complex-numbers>

nebo na webu VŠCHT:

<https://e-learning.vscht.cz/mod/page/view.php?id=10641>

Příklady 1: Dané komplexní číslo zapište v algebraickém tvaru, určete jeho reálnou a imaginární část a znázorněte je v Gaussově rovině: **(178/1)**

a) $a = (-4, 3)$

e) $e = (0, -2)$

b) $b = (2, \sqrt{6})$

f) $f = (1, 0)$

c) $c = (-7, -3)$

g) $g = (-6, 0)$

d) $d = \left(\frac{5}{7}, -1\right)$

h) $h = (0, 3)$

Příklady 2: Dané komplexní číslo zapište jako uspořádanou dvojici reálných čísel a znázorněte je v Gaussově rovině: **(179/2)**

a) $a = 5 + 3i$

e) $e = \frac{2}{5}$

b) $b = 2 - 4i$

f) $f = -0,5i$

c) $c = -0,5 + i$

g) $g = 1 - i\sqrt{2}$

d) $d = \sqrt{3} - i$

h) $h = \frac{3-2i}{5}$

Příklady 3: Vypočítejte absolutní hodnotu komplexního čísla a určete, zda je komplexní jednotkou: **(179/3)**

a) $a = -3 + 4i$

e) $e = \frac{\sqrt{7}-3i}{4}$

b) $b = -\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$

f) $f = -6 - 7i$

c) $c = (0, -2)$

g) $g = 4i$

d) $d = (8, 0)$

h) $h = -5$

Příklady 4: Je dáno komplexní číslo. Určete k němu číslo opačné a číslo komplexně sdružené, pak je znázorněte v téže Gaussově rovině: **(180/4)**

a) $a = -5 + 2i$

e) $e = -7 - 3i$

b) $b = (3, 1)$

f) $f = i$

c) $c = 4 - 2i$

g) $g = \frac{-3+i\sqrt{2}}{2}$

d) $d = (0, -3)$

h) $h = 7$

Příklad s postupem 1: Je dáno: $a = 2 - 3i, b = -4 - i, c = 3 + 4i, d = -2i$. Vypočítejte: **(180/příklad 1)**

a) $m = a + b + c + d$

d) $r = a - \bar{a}$

b) $n = a - b - c + d$

e) $s = b - (-b)$

c) $p = \bar{a} + b - \bar{c} - d$

f) $t = c + \bar{c}$

Příklady 5: Je dáno: $a = 7 - 2i$. Určete početně i graficky: **(181/5)**

a) $r = a + \bar{a}$

b) $s = a - \bar{a}$

c) $t = a + (-a)$

d) $u = a - (-a)$

Příklady 6: Je dáno: $a = -6 - 2i, b = 3 + i, c = -i$. Určete početně i graficky: $r = a + b + c$ **(181/6)**

Příklady 7: Je dáno: $a = 8 + 2i, b = -4i, c = -1 - i, d = 2$. Určete početně i graficky: $s = a - b + c - d$ **(181/7)**

Příklady 8: Je dáno: $a = -3 + 5i, b = -3 + 2i, c = -4i, d = 2i$. Určete početně i graficky: $t = -a + \bar{b} - c + d$ **(181/8)**

Příklady 9: Je dáno: $a = 7i, b = -4 + 5i, c = 8$. Určete početně i graficky: $u = -\bar{a} + \bar{b} + c$ **(181/9)**

Příklady 10: Je dáno: $a = 3,5 + i, b = \frac{3}{2} - i, c = 6 + 3i, d = 1$. Určete početně i graficky: $v = \bar{a} - b - \bar{c} - d$ **(181/10)**

Příklady 11: Je dáno: $a = -7 + 2i, b = 3 - i, c = -6 - 5i$. Určete početně i graficky: $w = -a + b + \bar{c}$ **(181/11)**

Příklady 12: Je dáno: $a = -0,8 + 0,2i, b = 4 - 0,4i, c = -7 + 3i$. Určete početně i graficky: $z = \bar{a} - a + \bar{b} - c$ **(181/12)**

Příklady 13: Je dáno: $a = -8 - 3i, b = 2 - i, c = 7 + 2i, d = -5 + 8i$. Určete početně i graficky: $p = a + \bar{b} - \bar{c} + c - d$ **(182/13)**

Příklad s postupem 2: Je dáno: $a = 3 - 2i$, $b = 4 + 5i$, $c = -2 - 3i$, $d = -5$.
Vypočtěte: (182/příklad 2)

- | | |
|---------------|---|
| a) ab | d) $(ad - \bar{b}c) \cdot (8 - 12i)$ |
| b) b^2 | e) $i^{52} - 2i^{102} - 3i^{27} + i^{41}$ |
| c) $c\bar{c}$ | |

Příklady 14: Vypočtěte: (182/14)

- | | |
|-------------------------------------|---|
| a) $(3 + 2i)(3 - 2i)$ | e) $(\sqrt{7} - 8i)(\sqrt{7} + 8i)$ |
| b) $(1 - i\sqrt{5})(1 + i\sqrt{5})$ | f) $(\sqrt{5} + 2i\sqrt{3})(\sqrt{5} - 2i\sqrt{3})$ |
| c) $(-6 - 4i)(-6 + 4i)$ | g) $(0,1 + i)(0,1 - i)$ |
| d) $(-3 + 4i)(-3 - 4i)$ | h) $\left(-\frac{9}{2} - 2i\right)\left(-\frac{9}{2} + 2i\right)$ |

Příklady 15: Vypočtěte: (183/15)

- | | |
|-----------------------|--|
| a) $2(3 - 5i)$ | e) $(-10 + 4i)\left(-\frac{1}{2}\right)$ |
| b) $(-6 + 3i)(2 + i)$ | f) $(2 - 7i)(3 + 6i)$ |
| c) $(4 - 2i)(-3i)$ | g) $-4(-1 - 5i)$ |
| d) $(-7 - i)(3 + 4i)$ | h) $(9 + 2i)(-9 - 2i)$ |

Příklady 16: Vypočtěte: (183/16)

- a) $-6i^3 + 5i^7 - i^{12} - 4i^{86}$
- b) $7i^{23} + 3i^{58} - 2i^{257}$
- c) $\frac{1}{3}i^{75} - \frac{5}{6}i^{150} - \frac{1}{2}i^{33} + i$
- d) $\frac{3}{4}i^{98} + \frac{7}{2}i^{49} - \frac{5}{8}i^{19}$

Příklad s postupem 3: Umocněte: (183/příklad 3)

- | | |
|------------------|------------------|
| a) $(-4 + 5i)^2$ | b) $(-1 - 2i)^3$ |
|------------------|------------------|

Příklady 17: Umocněte: (183/17)

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $(-5 + 7i)^2$ | e) $(-2 - 8i)^2$ |
| b) $(4 + i)^3$ | f) $(-2 - i)^3$ |
| c) $(6 + 2i)^2$ | g) $(4 - 3i)^2$ |
| d) $\left(-\frac{1}{2} + 3i\right)^2$ | h) $\left(\frac{1}{5} - 10i\right)^3$ |

Příklad s postupem 4: Vypočtěte: $\frac{3-2i}{-6-5i}$ (184/příklad 4)

Příklady 18: Vypočtěte: (184/18)

- | | |
|-------------------------|-----------------------|
| a) $\frac{2-5i}{3+i}$ | e) $\frac{i}{6+8i}$ |
| b) $\frac{2i}{1-4i}$ | f) $\frac{-3-5i}{6i}$ |
| c) $\frac{4+5i}{-2+3i}$ | g) $\frac{1-3i}{-2i}$ |
| d) $\frac{6-i}{-4-i}$ | h) $\frac{2+i}{2-i}$ |

Příklad s postupem 5: Určete reálná čísla x, y , pro která platí: (184/příklad 5)

- a) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}yi = 4 - 5i$
b) $\frac{2+3i^{25}}{1-2i^{63}} = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}yi$

Příklady 19: Určete reálná čísla x, y , pro která platí: (185/19)

- a) $7x - \frac{yi}{3} = 2 - i$
b) $5x - 3i = 1 + \frac{3yi}{5}$
c) $\frac{2}{3}x + i = -\frac{7}{5}yi$
d) $x - 2yi = (-3 + i)^2$

Příklady 20: Určete reálná čísla x, y , pro která platí: (185/20)

- a) $\frac{7-5i}{-2-4i} = 0,2x - 0,1yi$
b) $(1-i)(-2x + 3yi) = 2 + 4i$
c) $\frac{-4i}{i^8-3i^{233}} = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{2}yi$
d) $(3 + 2i^5)x + (1 - i^{29})y = -1 + 5i$

Příklady 21: Vypočítejte absolutní hodnotu komplexního čísla a určete, zda je dané komplexní číslo komplexní jednotka: (185/21)

- a) $a = \frac{21-3i}{21+3i}$
b) $b = \frac{-6-i\sqrt{3}}{6+i\sqrt{3}}$
c) $c = \frac{-4\sqrt{15}+0,9i}{-4\sqrt{15}-0,9i}$
d) $d = \frac{11+4i}{-11+4i}$

Příklady 22: Vypočítejte: (185/22)

- a) $\left| \frac{2-4i}{-1-3i} \right|$
b) $|(8 - 5i)(2 + i)|$
c) $\frac{6-4i}{6+4i} - \frac{6+4i}{6-4i}$
d) $\left| \frac{7\sqrt{5}-21i}{-\sqrt{5}+3i} \right|$
e) $\left| \frac{3+i}{3-i} : [(2+i)(2-i)]^{-1} \right|$
f) $[-3i^7 - 4(i^{66} + i) + 4i^{100} + 3i](8 - 2i)$
g) $\frac{6-2i}{1+i} - \left(\frac{2-3i}{2i} \right)^{-1}$
h) $\left| \frac{6+6i\sqrt{7}}{-1-i\sqrt{7}} \right| - \left(\frac{1}{2} + i \right) \left(i - \frac{1}{2} \right) - 7i^{12}$

GONIOMETRICKÝ TVAR KOMPLEXNÍHO ČÍSLA

Goniometrický tvar zdůrazňuje geometrické vlastnosti komplexního čísla, konkrétně jeho **absolutní hodnotu** (vzdálenost daného čísla od počátku v komplexní rovině) a **argument** (velikost úhlu, který svírá spojnice daného čísla a počátku v komplexní rovině s kladnou reálnou poloosou).

DEFINICE GONIOMETRICKÉHO TVARU KOMPLEXNÍHO ČÍSLA

Goniometrický tvar nenulového komplexního čísla z je výraz $|z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Reálné číslo α se nazývá **argument** komplexního čísla z .

Převod algebraického tvaru na goniometrický tvar:

$$z = a + bi = |z| \cos \alpha + |z|i \cdot \sin \alpha = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$a = |z| \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{a}{|z|}$$

$$b = |z| \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{b}{|z|}$$

Převod goniometrického tvaru na algebraický tvar:

$$z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha) = |z| \cos \alpha + |z| \sin \alpha \cdot i = a + bi$$

SOUČIN, PODÍL KOMPLEXNÍCH ČÍSEL V GONIOMETRICKÉM TVARU

Součin nenulových komplexních čísel $a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ a $b = |b|(\cos \beta + i \sin \beta)$ je komplexní číslo

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)].$$

Podíl nenulových komplexních čísel $a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ a $b = |b|(\cos \beta + i \sin \beta)$ je komplexní číslo

$$\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)].$$

MOIVREOVA VĚTA

Pokud je z komplexní jednotkou ($|z| = 1$), hovoříme o tzv. **Moivreově větě**.

Pro každé přirozené číslo n a každé reálné číslo α platí:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha).$$

UMOCŇOVÁNÍ KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

Mějme nenulové komplexní číslo $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ a přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$, pak **n -tá mocnina** komplexního čísla z je komplexní číslo

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)].$$

Podrobné vysvětlení Goniometrického tvaru komplexního čísla:

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~portal/komplexni_cisla/?page=goniometricky-tvar

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~portal/komplexni_cisla/?page=goniometricky-tvar-operace

Příklad s postupem 7: (188/příklad 7)

- a) Zapište komplexní číslo $a = 3 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$ v algebraickém tvaru.
- b) Zapište komplexní číslo $b = -\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8}i$ v goniometrickém tvaru.

Příklady 25: Zobrazte komplexní číslo v Gaussově rovině a zapište je v goniometrickém tvaru: (189/25)

- | | |
|---------|-------------------|
| a) 1 | e) $-\frac{7}{2}$ |
| b) -1 | f) $3i$ |
| c) i | g) $-i\sqrt{2}$ |
| d) $-i$ | h) 4 |

Příklady 26: Zapište komplexní číslo v algebraickém tvaru: (189/26)

- | | |
|---|--|
| a) $\frac{2}{5}(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$ | e) $\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ$ |
| b) $4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$ | f) $2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$ |
| c) $1,5(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$ | g) $\sqrt{7} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$ |
| d) $\frac{1}{6} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ | h) $10(\cos 305^\circ 20' + i \sin 305^\circ 20')$ |

Příklady 27: Zapište komplexní číslo v goniometrickém tvaru: (189/27)

- | | |
|--|--|
| a) $5\sqrt{3} + 5i$ | e) $-\frac{7}{3}\sqrt{2} + \frac{7}{3}i\sqrt{2}$ |
| b) $-\frac{\sqrt{2}}{7} - \frac{\sqrt{2}}{7}i$ | f) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ |
| c) $6 - 6i\sqrt{3}$ | g) $4 + 5i$ |
| d) $0,2 + 0,2i\sqrt{3}$ | h) $-3 - 4i$ |

Příklad s postupem 8: (190/příklad 8)

Je dáno: $a = 3(\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ)$, $b = \frac{1}{4} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$.

Určete součin $a \cdot b$ a podíl $\frac{a}{b}$ a výsledky zapište v algebraickém tvaru.

Příklady 28: Určete součin $a \cdot b$ a podíl $\frac{a}{b}$ a výsledky zapište v algebraickém tvaru: (190/28)

- a) $a = 4(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$, $b = 2(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$
- b) $a = \frac{1}{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$, $b = \cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4}$
- c) $a = \frac{3}{5}(\cos 210^\circ - i \sin 210^\circ)$, $b = 6(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$
- d) $a = 7 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$, $b = \frac{1}{2}(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$
- e) $a = 3 \left(\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$, $b = \frac{2}{9} \left(\cos \frac{7\pi}{4} - i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$
- f) $a = \cos 945^\circ + i \sin 945^\circ$, $b = \cos 675^\circ + i \sin 675^\circ$
- g) $a = 8 \left(\cos \frac{17\pi}{6} + i \sin \frac{17\pi}{6} \right)$, $b = 2(\cos 1320^\circ + i \sin 1320^\circ)$
- h) $a = 10(\cos 200^\circ 12' + i \sin 200^\circ 12')$, $b = 5(\cos 81^\circ 40' + i \sin 81^\circ 40')$

Příklad s postupem 9: (191/příklad 9)

Pomocí Moivreovy věty vypočtete z^6 a výsledek zapište v algebraickém tvaru: $z = -2 - 2i$

Příklady 29: Pomocí Moivreovy věty vypočtete mocninu daného čísla z a výsledek zapište v algebraickém tvaru: (191/29)

- a) $z^8, z = -1 + i$
- b) $z^5, z = 3(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$
- c) $z^{10}, z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
- d) $z^{20}, z = \cos 315^\circ + i \sin 315^\circ$
- e) $z^4, z = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{6}i$
- f) $z^6, z = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$
- g) $z^{12}, z = 2 - 2i$
- h) $z^9, z = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$

EXPONENCIÁLNÍ TVAR KOMPLEXNÍHO ČÍSLA

V exponenciálním tvaru komplexního čísla se vyskytují stejné atributy daného čísla jako ve tvaru goniometrickém, a to **absolutní hodnota** a **argument**. Jde jen o jiný a kratší zápis, se kterým se dobře pracuje.

DEFINICE EXPONENCIÁLNÍHO TVARU KOMPLEXNÍHO ČÍSLA

Exponenciální tvar nenulového komplexního čísla z je výraz $|z|e^{i\alpha}$, kde číslo α je **argumentem** komplexního čísla z a $|z|$ je jeho **absolutní hodnotou**.

Přesné odůvodnění je poměrně složité, ale výsledný vztah je jednoduchý:

$$e^{i\alpha} = (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$$

Užitím této definice dostáváme rovnost mezi exponenciálním a goniometrickým tvarem:

$$|z| \cdot e^{i\alpha} = |z| \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$$

NÁSOBENÍ A DĚLENÍ KOMPLEXNÍCH ČÍSEL V EXPONENCIÁLNÍM TVARU

Součin nenulových komplexních čísel $a = |a|e^{i\alpha}$ a $b = |b|e^{i\beta}$ je číslo

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot e^{i(\alpha+\beta)}.$$

Podíl nenulových komplexních čísel $a = |a|e^{i\alpha}$ a $b = |b|e^{i\beta}$ je číslo

$$\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} \cdot e^{i(\alpha-\beta)}.$$

Podrobné vysvětlení Exponenciálního tvaru komplexního čísla:

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~portal/komplexni_cisla/?page=exponencialni-tvar

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~portal/komplexni_cisla/?page=exponencialni-tvar-operace

Přehled různých tvarů komplexního čísla:

<https://cs.khanacademy.org/math/komplexni-cisla/x5a21ddc4c0c1b430:operace-s-komplexnimi-cisly/x5a21ddc4c0c1b430:goniometricky-tvar-komplexnich-cisel/a/complex-number-forms-review>

Příklady z internetu 1: Vyjádřete v exponenciálním tvaru se základním argumentem číslo $z = 1 - \sqrt{3}i$.

Příklady z internetu 2: Vyjádřete v algebraickém tvaru komplexní číslo $z = 4e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Příklady z internetu 3: Vyjádřete v exponenciálním tvaru následující komplexní čísla:

a) $z = \cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8}$

b) $z = 25 \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right)$

Příklady z internetu 4: Vyjádřete v goniometrickém tvaru následující komplexní čísla:

a) $z = e^{i\frac{3\pi}{7}}$

b) $z = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Příklady z internetu 5: Vyjádřete v exponenciálním tvaru následující komplexní čísla:

a) $z = 3$

b) $z = -2i$

c) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

d) $z = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

Příklady z internetu 6: Vyjádřete v algebraickém tvaru následující komplexní čísla:

a) $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) $z = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}$

c) $z = 5e^{i\frac{23\pi}{6}}$

Příklady z internetu 7: Vypočítejte **součin** komplexních čísel

$a = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ a $b = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Příklady z internetu 8: Vypočítejte **podíl** $\frac{a}{b}$ komplexních čísel

$a = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$ a $b = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Příklady z internetu 9: Vypočítejte v exponenciálním tvaru **součin** komplexních čísel x a y :

a) $x = 5, y = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) $x = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}, y = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Příklady z internetu 10: Vypočítejte v exponenciálním tvaru **podíl** komplexních čísel x a y :

a) $x = 8, y = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) $x = 5e^{i\frac{2\pi}{3}}, y = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{6}}$

ŘEŠENÍ ROVNIC V MNOŽINĚ VŠECH KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

- Lineární rovnice – algebraické rovnice 1. stupně
- Kvadratické rovnice – algebraické rovnice 2. stupně
- Kubické rovnice – algebraické rovnice 3. stupně
- Binomické rovnice – dvojčlen
- Trinomické rovnice – trojčlen
- Bikvadratické rovnice – speciální případ trinomické rovnice
- Reciproké rovnice

BINOMICKÁ ROVNICE

Binomickou rovnici se nazývá rovnice $x^n = a$, kde $a = |a| \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$, tj. $x^n = |a| \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$. V oboru komplexních čísel má tato rovnice právě n různých kořenů, a to $x_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right)$, kde $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

ŘEŠENÍ KVADRATICKÉ ROVNICE V MNOŽINĚ C

Kvadratická rovnice s neznámou x a reálnými koeficienty

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in R, a \neq 0$$

nemá reálné kořeny v oboru reálných čísel, pokud diskriminant $D = b^2 - 4ac$ je **záporný**. Ale v oboru komplexních čísel má **dva komplexně sdružené kořeny**

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|} i}{2a}.$$

Binomická rovnice:

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~portal/komplexni_cisla.dp/?page=rovnice-binomicke

Řešení kvadratické rovnice v oboru komplexních čísel:

<https://e-learning.vscht.cz/mod/page/view.php?id=10642>

Příklad s postupem 11: (193/příklad 11)

1. Řešte rovnici v C :

a) $2(8 - x) = 6x - (2x - 1)^2$

b) $x^2 = -15$

2. Sestavte kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, je-li dán jeden její kořen $3 - 7i$.

Příklady 31: Řešte rovnici v oboru komplexních čísel: (194/31)

a) $x^2 = -4$

b) $x^2 + 81 = 0$

c) $5x^2 + 3 = 0$

d) $x^2 + 12 = 0$

e) $x^2 - 6x + 45 = 0$

f) $x^2 + 10x + 29 = 0$

g) $2x^2 - 14x + 25 = 0$

h) $25x^2 + 30x + 13 = 0$

Příklady 32: Řešte rovnici v oboru komplexních čísel: (194/32)

- a) $2(x^2 - 10) = 5 + 3x(x - 2)$
- b) $7 - (x - 1)^2 - 11 = 0$
- c) $3 - (4 + x)^2 = 4(1 - 4x)$
- d) $6(x - 1) = (x + 2)^2$
- e) $x - (x - 3)^2 - 13 = 3(x - 3) - 2x$
- f) $2x(5x - 6) + 68 = (3x - 2)^2$
- g) $x(2 - x) - (x - 1)(1 + x) = 9 - (x + 1)^2$
- h) $20 - (2x - 5)^2 = 2x(-4 - x)(-2)$

Příklady 33: Řešte rovnici v oboru komplexních čísel: (194/33)

- a) $2x + 11 - \frac{x^2}{6} = -\frac{2x}{3} - \frac{2(x^2+1)}{6}$
- b) $1 - \frac{(x+3)^2}{10} = \frac{3(3-x)}{5}$
- c) $\frac{1}{4}(2x - 1)^2 + 4 = \frac{3}{4}\left(x^2 + \frac{2x}{3}\right) - 0,25$
- d) $\frac{1}{2} - \frac{86-x}{4} - \frac{(1+x)^2}{8} = 0$
- e) $\frac{x^2}{10} + \frac{1}{2}(x - 7) + 10 = \frac{3}{2}x - (3,5 + x)$
- f) $\frac{x(x-2)}{6} - \frac{3x-5}{2} = \frac{13}{6} - \frac{12x}{8}$
- g) $1 - \frac{x+1}{5} \cdot 2 - 0,9x^2 = \frac{2x(10x-1)}{5} + \frac{3}{2}$
- h) $0,25(x - 5) \cdot 3 - \frac{(x-4)^2}{2} = \frac{13(3x-1)}{4} + 0,5x^2$

Příklady 34: Řešte rovnici v oboru komplexních čísel: (195/34)

- | | |
|--|--|
| a) $\frac{3}{x+4} = \frac{x}{x-4} - \frac{7+5x}{x^2-16}$ | e) $\frac{5x^2+29}{1-x^2} + \frac{7x}{x-1} = \frac{3x}{1+x}$ |
| b) $\frac{4}{3-x} - \frac{3x+7}{9-x^2} = \frac{2x}{3+x}$ | f) $\frac{4x}{5x-2} + \frac{5(1-x)}{2x-5x^2} = \frac{x+1}{x}$ |
| c) $\frac{x-1}{4x+1} + \frac{5x+28}{4x^2+x} - \frac{3}{x} = 0$ | g) $\frac{2}{2x+1} - \frac{x+4}{x-2} = 1$ |
| d) $\frac{6}{8-3x} = \frac{x}{2+3x}$ | h) $\frac{5x}{3x+2} - \frac{6-5x-6x^2}{4-9x^2} = \frac{1}{2-3x}$ |

Příklady 35: Sestavte kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, je-li dán jeden její kořen: (195/35)

- | | |
|----------------------|---------------------------------|
| a) $4i$ | e) $\frac{3}{5} - i$ |
| b) $5 - 3i$ | f) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ |
| c) $-7i$ | g) $2i\sqrt{5}$ |
| d) $-1 + i\sqrt{11}$ | h) $-4 - 5i$ |