

Parametrické vyjádření přímky

VYJÁDŘENÍ POLOPŘÍMKY, ÚSEČKY A OPAČNÉ POLOPŘÍMKY:

- **POLOPŘÍMKA AB :** parametr $t \in \langle 0; \infty \rangle$
- **ÚSEČKA AB :** parametr $t \in \langle 0; 1 \rangle$
- **OPAČNÁ POLOPŘÍMKA K AB :** parametr $t \in (-\infty; 0)$

Příklad 1: Zjistěte, zda bod C leží na polopřímce AB . Popřípadě na úsečce AB .

- $A[8; -3], B[5; 2], C[2; 7]$
- $A[3; -2], B[7; 6], C[-1; -10]$
- $A[-1; 2], B[3; 5], C\left[1; \frac{7}{2}\right]$
- $A[-4; 1], B[6; -4], C[2; -2]$
- $A[3; -2], B[7; 6], C[4; 0]$
- $A[6; 3], B[4; -1], C\left[\frac{11}{2}; 2\right]$

Vzájemná poloha přímek daných parametrickými rovnicemi

ROVNOBĚŽNÉ:

- Dvě přímky $p(P, \vec{u})$ a $q(Q, \vec{v})$ jsou spolu rovnoběžné právě tehdy, je-li vektor $\vec{v}$ násobkem vektoru $\vec{u}$.

TOTOŽNÉ:

- Dvě přímky $p(P, \vec{u})$ a $q(Q, \vec{v})$ jsou totožné právě tehdy, jsou-li rovnoběžné a leží-li bod Q na přímce p .
- Bod Q leží na přímce $p(P, \vec{u})$ právě tehdy, je-li vektor $Q - P$ násobkem vektoru $\vec{u}$.

RŮZNOBĚŽNÉ:

- V tomto případě budeme počítat jejich průsečík.
- **POZOR!** Průsečík dvou různoběžek neodpovídá stejným hodnotám parametru. Nezapomeňte proto označit hodnoty parametru různými písmeny, tj. psát např. $X = P + t\vec{u}$, $X = Q + s\vec{v}$.
 - Soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých pro hodnoty parametrů t, s .
 - Dosazení hodnoty parametru do parametrické rovnice přímky

Příklad 1: Zjistěte vzájemnou polohu přímek $p(P, \vec{u})$ a $q(Q, \vec{v})$. Jsou-li to různoběžky, určete jejich průsečík R .

- $P[1; 2], \vec{u} = (2; -3), Q[0; 1], \vec{v} = \left(-1; \frac{3}{2}\right)$
- $P[3; 2], \vec{u} = (2; -1), Q[-1; 1], \vec{v} = (1; 1)$
- $P\left[\frac{3}{2}; 1\right], \vec{u} = (-1; 2), Q[-1; 6], \vec{v} = \left(\frac{1}{2}; -1\right)$

Příklad 2: Určete vzájemnou polohu přímek $p(A, \vec{u})$ a $q(B, \vec{v})$, je-li dáno:

- $A[3; -1], \vec{u} = (-2; 1), B[4; -2], \vec{v} = (1; -2)$
- $A[5; 2], \vec{u} = (6; -9), B[3; 5], \vec{v} = (-1; 1,5)$
- $A[1; -2], \vec{u} = \left(\frac{1}{2}; 3\right), B[2; 4], \vec{v} = \left(\frac{1}{3}; 2\right)$
- $A[7; -4], \vec{u} = (-2; 3), B[3; -2], \vec{v} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$

Příklad 3: Zjistěte vzájemnou polohu přímek $p(A, \vec{u})$ a $q(B, \vec{v})$. Jsou-li různoběžky, určete jejich průsečík R .

- a) $A[4; -5], \vec{u} = (3; -1), B[1; 2], \vec{v} = (-6; 2)$
- b) $A[3; 1], \vec{u} = (4; 2), B[-1; -1], \vec{v} = (-1; 3)$
- c) $A[1; 2], \vec{u} = \left(\frac{2}{3}; -2\right), B[7; -16], \vec{v} = (3; -9)$
- d) $A[5; 6], \vec{u} = \left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right), B[2; 7], \vec{v} = (-6; 4)$
- e) $A[-2; 5], \vec{u} = (9; 6), B[4; 9], \vec{v} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$
- f) $A[-4; -1], \vec{u} = (6; -3), B[4; 7], \vec{v} = (2; 5)$

Příklad 4: Určete vzájemnou polohu přímek p, q , s parametrickými vyjádřeními:

- a) $p: x = 3 - 2t, y = 4 + 3t; t \in R$
 $q: x = 6 + 3s, y = -0,5 - 4,5s; s \in R$
- b) $p: x = 1 + 4t, y = -t; t \in R$
 $q: x = 3 - 12s, y = -2 + 3s; s \in R$
- c) $p: x = -1 + t, y = 5 - 3t; t \in R$
 $q: x = 5 - 3s, y = -1 + s; s \in R$

Příklad 5: Přesvědčte se, že přímky p, q jsou různoběžné, a určete jejich průsečík:

- a) $p: x = 2 - 3t, y = -5 + 2t; t \in R$
 $q: x = 6 + 5s, y = 3 + 2s; s \in R$
- b) $p: x = 5 - 4t, y = -1 + 6t; t \in R$
 $q: x = -7 - 5s, y = 8 + 3s; s \in R$
- c) $p: x = 3 + 5t, y = 2 - 7t; t \in R$
 $q: x = 1 - s, y = 2s; s \in R$
- d) $p: x = -1 - \frac{1}{3}t, y = 3 + t; t \in R$
 $q: x = 1 - 2s, y = -2 + 3s; s \in R$

Příklad 6: Určete vzájemnou polohu přímek p, q , s parametrickými vyjádřeními:

- a) $p: x = 6 + 2t, y = 4 - t; t \in R$
 $q: x = 4 + 1s, y = -2 + 3s; s \in R$
- b) $p: x = 5 - 2t, y = -1 + 4t; t \in R$
 $q: x = 2 - 3s, y = 3 + 6s; s \in R$
- c) $p: x = 1 - 3t, y = 2 - 2t; t \in R$
 $q: x = -8 + s, y = -4 + \frac{2}{3}s; s \in R$

Polohové úlohy v rovině

Příklad 1: Napište obecnou rovnici přímky p .

$$p: \begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 3 + 2t, t \in R \end{aligned}$$

Příklad 2: Napište parametrické rovnice přímky $p: 3x - 2y + 1 = 0$.

Příklad 3: Určete průsečík přímek p, q .

$$\begin{aligned} p: \begin{aligned} x &= 3 - 2t, \\ y &= -1 + t, t \in R, \end{aligned} \\ q: 4x - y + 5 &= 0. \end{aligned}$$

Rovnice pro parametr t , kterou jsme řešili, může mít:

- právě jedno řešení – přímky p, q jsou různoběžné,
- nekonečně mnoho řešení – přímky p, q jsou totožné,
- žádné řešení – přímky p, q jsou rovnoběžné a různé.

Příklad 4: Určete průsečík přímek p, q .

$$p: 3x + 5y - 11 = 0, \quad q: -2x + 3y + 1 = 0.$$

Příklad 5: Napište obecnou rovnici přímky p .

$$\begin{aligned} \text{a) } p: x &= 2 - t, y = 1 + 3t, t \in R \\ \text{b) } p: x &= 4 - 2t, y = 3 + t, t \in R \end{aligned}$$

Příklad 6: Napište parametrické vyjádření přímky p .

$$\begin{aligned} \text{a) } p: 2x + y - 1 &= 0 \\ \text{b) } p: x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Příklad 7: Určete průsečík přímek p, q .

$$\begin{aligned} \text{a) } p: x + y - 5 &= 0, q: 2x - 3y + 5 = 0 \\ \text{b) } p: 2x - y - 3 &= 0, q: x = -5 + 3t, y = -3 + t, t \in R \end{aligned}$$

Příklad 8: Napište parametrické vyjádření přímky, jejíž obecná rovnice je

$$\begin{aligned} \text{a) } x + y + 3 &= 0 \\ \text{b) } x + 3y - 2 &= 0 \\ \text{c) } 4x - 3y + 8 &= 0 \\ \text{d) } 5x - 6y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Příklad 9: Ukažte, že přímka $p: 4x - 5y + 16 = 0$ je různoběžná s přímkou danou parametrickým vyjádřením

$$x = 2 - 3t, y = -4 + 2t; t \in R, \text{ a určete jejich průsečík.}$$

Příklad 10: Určete vzájemnou polohu přímek p, q . Jsou-li přímky různoběžné, určete jejich průsečík.

$$\begin{aligned} \text{a) } p: 2x - y + 3 &= 0, q: x = 3 + 2t, y = t; t \in R \\ \text{b) } p: 3x + y - 10 &= 0, q: x = 4 - t, y = -2 + 3t; t \in R \\ \text{c) } p: 5x - 2y + 6 &= 0, q: x = -1 + 2t, y = 4 + 5t; t \in R \\ \text{d) } p: 4x - 3y + 5 &= 0, q: x = -2 + 5t, y = 3 + 4t; t \in R \end{aligned}$$

Příklad 11: Ukažte, že přímky p, q jsou rovnoběžné a pak vypočítejte jejich vzdálenost:

$$\begin{aligned} \text{a) } p: 3x - 4y + 15 &= 0, q: 6x - 8y = 0 \\ \text{b) } p: 5x - 12y + 10 &= 0, q: x - 2,4y - 4,5 = 0 \\ \text{c) } p: x + 2y - 10 &= 0, q: x = 3 - 2t, y = 2 + t; t \in R \\ \text{d) } p: x = 7 - 6t, y &= 5 + 8t; t \in R \quad q: x = 1,5s, y = 3 - 2s; s \in R \end{aligned}$$

Metrické úlohy v rovině

Příklad 1: Určete rovnici přímky q , která prochází bodem $P[1; 3]$ a je kolmá k přímce $p: 2x - y + 1 = 0$.

Vzdálenost bodu od přímky?

Vzdálenost d od bodu $P[p_1; p_2]$ od přímky $p: ax + by + c = 0$ se vypočítá podle vzorce:

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Příklad 2: Zjistěte vzdálenost d bodu $P[-3; 1]$ od přímky $2x + y - 2 = 0$.

Příklad 3: Najděte bod P' souměrně sdružený k bodu $P[2; -3]$ podle osy $p: 2x - y + 3 = 0$.

Příklad 4: Určete délky stran trojúhelníku ABC , jsou-li dány velikosti jeho výšek $v_a = 9, v_b = 7, v_c = 8$.

Příklad 5: Najděte na přímce $p: 3x - 4y + 1 = 0$ bod Q , který má od bodu $P[1; ?]$ ležícího na přímce p vzdálenost $d = 10$.

Odchylka dvou přímek

- Dvě libovolné různoběžky p, q dělí rovinu na čtyři úhly.
- Každý dva a dva z nich jsou shodné.
- Jestliže velikost úhlů jedné dvojice označíme φ , bude velikost úhlů z druhé dvojice rovna $\psi = \pi - \varphi$.
- **Odchylka přímek p, q** je to z čísel φ, ψ , které leží v intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.
- Odchylku přímek můžeme snadno vypočítat pomocí úhlu vektorů.
- **Odchylka přímek p, q se směrovými vektory $\vec{u}, \vec{v}$ je číslo $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$, pro které platí**

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Příklad 6: Vypočítejte odchylku přímek p, q :

$$\begin{array}{ll} p: x = 1 + t & q: 2x + y - 1 = 0 \\ y = 2 + 3t, t \in \mathbb{R} & \end{array}$$

Jak určíme osu úhlu AVB ?

- Najdeme kladné násobky vektorů $A - V$ a $B - V$ tak, aby tyto vektory měly stejnou velikost
- $\vec{u} = \frac{1}{|A-V|} \cdot (A - V)$,
- $\vec{v} = \frac{1}{|B-V|} \cdot (B - V)$.

Příklad 7: Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem Q a je kolmá k přímce p .

- a) $Q[1; -3], p: -x + 3y - 2 = 0$
b) $Q[2; 5], p: x = 2 + t, y = 3t, t \in \mathbb{R}$

Příklad 8: Určete vzdálenost bodu M od přímky AB .

- a) $M[11; -4], A[1; 1], B[-3; -2]$
b) $M[-4; 3], A[3; -1], B[-9; 4]$

Příklad 9: Určete souřadnice bodu A' souměrně sdruženého s bodem A podle přímky p .

- a) $A[5; 1], p: 2x - y - 4 = 0$
b) $A[8; 1], p: P[1; 0], \vec{u} = (1; 3)$

Příklad 10: Napište obecnou rovnici osy úsečky AB .

a) $A[1; 3], B[-1; 2]$

b) $A[2; 0], B[4; 4]$

Příklad 11: Určete odchylku přímek p, q , které jsou dány rovnicemi

$p: 3x - 4y + 7 = 0, q: x + 2y - 1 = 0$.

Příklad 17: Zjistěte, zda bod M je bodem konvexního úhlu AVB :

a) $A[3; -2], V[-2; 1], B[6; 5], M[-1; 2]$

b) $A[-5; -3], V[4; 1], B[-1; 2], M[-3; -2]$

Příklad 18: Vypočítejte souřadnice paty kolmice vedené bodem A k přímce p :

a) $A[3; -7], p: 5x - 6y + 4 = 0$

b) $A[-4; 2], p: x = 1 + 2t, y = 2 - t; t \in \mathbb{R}$

Příklad 19: Vypočítejte vzdálenost bodu $A[1; 3]$ od přímky

s parametrickým vyjádřením $x = 1 - 3t, y = -2 + 4t; t \in \mathbb{R}$.

Příklad 20: Vypočítejte vzdálenost bodu $B[3; -7]$ od přímky dané rovnicí

$4x - 3y + 7 = 0$.

Příklad 22: Zjistěte odchylku přímky $p: x - 3 = 0$ a přímky $q: x\sqrt{3} - y + 5 = 0$.

Leží dva body ve stejné polorovině?

- jedna polorovina: $ax + by + c \geq 0$,
- druhá polorovina: $ax + by + c \leq 0$.

Příklad 8: Zjistěte, zda body K, L leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou p .

a) $p: 3x - 2y + 1 = 0, K[1; 2], L[2; -3]$

b) $p: 2x - y + 3 = 0, K[3; 0], L[0; 0]$

c) $p: 5y - 1 = 0, K[1; 3], L[5; -1]$

Příklad 9: Zjistěte, zda bod K leží v úhlu AVB .

a) $A[2; 3], B[1; -2], V[5; -1], K[0; 5]$

b) $A[1; -1], B[2; 3], V[-1; 1], K[-3; 2]$

Příklad 15: Zjistěte, zda body $A[2; -7], B[-7; 0]$ leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou, která má rovnici $2x + 3y + 15 = 0$.

Příklad 16: Zjistěte, zda body $M[-6; -7], N[-1; -3]$ leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou, která má rovnici $3x - 4y - 7 = 0$.

DALŠÍ PŘÍKLADY:

- 1) Vypočítejte vzdálenost bodu $A[8; 3]$ od přímky dané rovnicí
 $4x - 2y + 5 = 0$.
- 2) Vypočítejte vzdálenost bodu $M[1; 5]$ od přímky s parametrickým vyjádřením $x = 4 + 2t, y = 3 - 6t; t \in R$.
- 3) Ukažte, že přímky p, q jsou rovnoběžné a pak vypočítejte jejich vzdálenost:
 $p: x = 1 + 4t, y = -t; t \in R$
 $q: x = 3 - 12s, y = -2 + 3s; s \in R$
- 4) Určete odchylku přímek p, q , které jsou dány rovnicemi:
 $p: x = -1 + t, y = 5 - 3t; t \in R$
 $q: x = 5 - 3s, y = -1 + s; s \in R$
- 5) Určete odchylku přímek p, q , které jsou dány rovnicemi:
 $p: 2x - y + 3 = 0$
 $q: x = 3 + 2t, y = t; t \in R$
- 6) Zjistěte, zda body M a N jsou body konvexního úhlu AVB :
 $V[1; 2], A[-3; 8], B[9; 4], M[5; 5], N[4; -2]$
- 7) Zjistěte, zda body K, L leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou p .
 $p: 3x - 2y + 7 = 0, K[4; 1], L[2; -5]$
- 8) Vypočítejte vzdálenost bodu $M[2; 3]$ od přímky s parametrickým vyjádřením $x = 5 - 4t, y = -3 + 6t; t \in R$.
- 9) Ukažte, že přímky p, q jsou rovnoběžné a pak vypočítejte jejich vzdálenost:
 $p: x = 1 + 2t, y = 2 - 3t; t \in R$
 $q: x = 0 - 1s, y = 1 + \frac{3}{2}s; s \in R$
- 10) Vypočítejte odchylku přímek p, q :
 $p: x = 2 - 3t, y = -5 + 2t; t \in R$
 $q: x = 6 + 5s, y = 3 + 2s; s \in R$
- 11) Vypočítejte odchylku přímek p, q :
 $p: x = 5 - 4t, y = -1 + 6t; t \in R$
 $q: 3x + 5y - 19 = 0$