

Analytická geometrie 2 – VEKTORY

Skalární součin vektorů

Skalární součin dvou vektorů $\vec{u} = (u_1; u_2)$, $\vec{v} = (v_1; v_2)$ v rovině je číslo
$$u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Skalární součin dvou vektorů $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ v prostoru je číslo

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Zapisujeme $\vec{u} \cdot \vec{v}$ nebo jen $\vec{u}\vec{v}$.

Příklad 2: Vypočítejte skalární součin vektorů

$$\vec{u} = (1; 2; -1) \text{ a } \vec{v} = (3; 1; 5).$$

Úhel vektorů $\vec{u}, \vec{v}$:

Vycházíme ze vztahu $\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Kolmost vektorů:

Dva nenulové vektory jsou navzájem kolmé, když je jejich skalární součin roven nule.

$$\vec{u}\vec{v} = 0$$

Příklad 3: Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ mají velikost $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 5$ a jejich úhel je $\frac{\pi}{3}$.

Určete jejich skalární součin.

Příklad 4: V rovině jsou v kartézské soustavě souřadnic dány body $A[0; 1]$, $B[3; 0]$, $C[1; 3]$. Určete velikost úhlu α v trojúhelníku ABC .

Mnemotechnická pomůcka: K vektoru $\vec{u}$ v rovině najdeme kolmý vektor, zaměníme-li souřadnice vektoru $\vec{u}$ a u jedné z nich změníme znaménko.

Úlohy:

2.20 Vypočítejte skalární součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ (φ označuje jejich úhel).

a) $\vec{u} = (1; 2)$, $\vec{v} = (-1; 1)$

b) $\vec{u} = (2; -1)$, $\vec{v} = (1; 3)$

e) $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$, $\varphi = 60^\circ$

f) $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = \frac{1}{2}$, $\varphi = 135^\circ$

2.23 Vypočítejte úhel vektorů $\vec{u}, \vec{v}$.

a) $\vec{u} = (1; 1)$, $\vec{v} = (-1; 1)$

b) $\vec{u} = (-2; 3)$, $\vec{v} = (4; -6)$

2.25 Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC .

$A[0; 1]$, $B[-1; 2]$, $C[1; 3]$

2.27 V rovině určete vektory kolmé po řadě k vektorům

$\vec{u} = (1; -1)$, $\vec{v} = (\sqrt{2}; -3)$, $\vec{w} = (-2; -5)$.

Sbírka úloh:

2.65 Vypočítejte skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$, je-li dáno:

a) $|\vec{u}| = 7$, $|\vec{v}| = 6$, $\varphi = 60^\circ$

b) $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3\sqrt{2}$, $\varphi = 45^\circ$

c) $|\vec{u}| = 4\sqrt{3}$, $|\vec{v}| = 5$, $\varphi = 150^\circ$

d) $|\vec{u}| = 3,5$, $|\vec{v}| = 5\sqrt{2}$, $\varphi = 90^\circ$

2.66 Vypočítejte skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$, je-li dáno:

a) $\vec{u} = (3; -4), \vec{v} = (-2; -1)$

b) $\vec{u} = (6; 8), \vec{v} = (-4; 3)$

2.68 Určete u_1 , resp. u_2 , tak aby $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, je-li:

a) $\vec{u} = (u_1; 6), \vec{v} = (-2; 1)$

b) $\vec{u} = (-3; u_2), \vec{v} = (5; -6)$

2.75 Zjistěte, zda vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou kolmé:

a) $\vec{u} = (6; 3), \vec{v} = (4; -8)$

b) $\vec{u} = (-1; 3), \vec{v} = (-3; 1)$

2.77 Vypočítejte velikost úhlu vektorů:

a) $\vec{u} = (-4; -2), \vec{v} = (-1; -3)$

b) $\vec{u} = (-2; 0), \vec{v} = (-2; -2\sqrt{3})$

Vektorový součin vektorů

Vektorový součin je pouze v prostoru.

Vektorový součin $\vec{w}$ dvou vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ značíme $\vec{u} \times \vec{v}$, tj. $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

Viz mnemotechnická pomůcka na straně 64.

Smíšený součin vektorů

Smíšený součin vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ je číslo $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Příklad 1: Pro vektory $\vec{a} = (1; 3; -1), \vec{b} = (2; 4; 5)$ vypočítejte vektorový součin $\vec{a} \times \vec{b}$.

Příklad 2: Jsou dány vektory $\vec{b} = (3; 1; 1), \vec{c} = (3; -4; -5)$.
Určete vektor $\vec{a} = (1; a_2; a_3)$ tak, aby bylo $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Úlohy:

2.36 Vypočítejte vektorový součin vektorů $\vec{a}, \vec{b}$:

a) $\vec{a} = (3; 1; 2), \vec{b} = (-1; 1; 0)$

b) $\vec{a} = (2; 1; 1), \vec{b} = (3; 3; 2)$

c) $\vec{a} = (1; 0; 3), \vec{b} = (-1; 0; -2)$

Sbírka úloh:

2.99 Určete vektorový součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, jestliže platí:

a) $\vec{u} = (-2; -3; 1), \vec{v} = (3; 4; -2)$

b) $\vec{u} = (3; -5; 7), \vec{v} = (-1; 2; -3)$

c) $\vec{u} = (4; 7; -12), \vec{v} = (2; 3; -5)$

d) $\vec{u} = (5; -6; 8), \vec{v} = (6; -8; 9)$