

Analytická geometrie 1 – SOUŘADNICE a VEKTORY

Souřadnice v rovině

Příklad 1: Zvolte kartézskou soustavu souřadnic Oxy a zobrazte v ní body $A[-2; -3], D\left[1; -\frac{3}{2}\right]$.

Příklad 2: Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC . Jsou dány body $A[1; 1], B[5; 1]$. Určete souřadnice bodu C výpočtem i měřením.

Příklad 3: Zvolte kartézskou soustavu souřadnic a zobrazte v ní body: $A[3; 1], B[1; -2], C[-5; -3]$.

Příklad 4: Sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ tak, aby střed kružnice opsané byl v počátku O kartézské soustavy souřadnic, aby první vrchol byl bod $A[5; 0]$ a aby pro bod $B[b_1; b_2]$ platilo $b_2 > 0$. Určete souřadnice všech vrcholů šestiúhelníku a) výpočtem, b) měřením.

Příklad 5: Sestrojte středy P, Q, R úseček AB, BC, AC z úlohy 3. Měřením zjistěte souřadnice bodů P, Q, R . Vyslovte hypotézu o tom, jak se vypočítají souřadnice středu úsečky ze souřadnic jejích krajních bodů.

Vzdálenost bodů

Vzdálenost dvou bodů $A[a_1; a_2], B[b_1; b_2]$ v rovině

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Příklad 1: Vypočítejte vzdálenost bodů $K[5; 7]$ a $L[2; 11]$.

Příklad 2: Jsou dány $A[1; 3], B[-1; x]$. Určete číslo x tak, aby $|AB| = \sqrt{5}$.

Příklad 3: Vypočítejte vzdálenost bodů A, B , je-li dáno:

- a) $A[1; 2], B[3; 5]$
- b) $A[4; 3], B[8; 4]$
- c) $A[5; 2], B[3; 6]$
- d) $A[7; 2], B[3; 2]$
- e) $A[4; 9], B[5; 5]$
- f) $A[8; -1], B[3; 1]$
- g) $A[2; -5], B[-4; 3]$
- h) $A[6; 4], B[2; 9]$
- i) $A[-1; 0], B[-3; 7]$
- j) $A[11; 6], B[8; 9]$
- k) $A[-3; -4], B[5; 2]$

Střed úsečky

Pro střed $S[s_1; s_2]$ úsečky AB , kde $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$, platí

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}.$$

Příklady:

- 1) Jsou dány body $A[4; 3]$ a $S[1; 2]$. Určete bod B tak, aby bod S byl střed úsečky AB .
- 2) Jsou dány body A, B . Vypočítejte souřadnice středu S úsečky AB .
 - a) $A[5; 1], B[1; 3]$
 - b) $A[7; 4], B[3; 8]$
 - c) $A[9; 6], B[5; 7]$
 - d) $A[14; 18], B[6; 2]$
 - e) $A[-5; 2], B[3; 7]$
 - f) $A[4; -1], B[-3; 5]$
 - g) $A[0; 9], B[-6; 7]$
 - h) $A[3; -8], B[7; 4]$
- 3) Jsou dány body B, S . Vypočítejte souřadnice bodu A tak, aby bod S byl střed úsečky AB .
 - a) $B[5; 8], S[4; 5]$
 - b) $B[1; 4], S[5; 6]$
 - c) $B[-3; 7], S[-1; 4]$
 - d) $B[2; 6], S[7; 1]$
 - e) $B[4; -5], S[2; 3]$
 - f) $B[9; 3], S[4; 8]$

Příklad: Vypočítejte délku těžnice na stranu a v trojúhelníku ABC , kde:

$$A = [2, 4]$$

$$B = [3, 2]$$

$$C = [-1, -6]$$

Vektor

Je-li vektor $\vec{u}$ v rovině určen orientovanou úsečkou AB , kde $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$, nazývají se čísla

$$u_1 = b_1 - a_1$$

$$u_2 = b_2 - a_2$$

souřadnice vektoru $\vec{u}$.

Zapisujeme $\vec{u} = (u_1; u_2)$.

Vzorový příklad: Je zadán vektor $\vec{u}$, počátečním bodem $A[1; 1]$ a koncovým bodem $B[2; 2]$. Vypočítejte a zapište vektor $\vec{u}$.

Příklad 1: Je dán vektor $\vec{u}$ určený body $A[1; 2]$ a $B[5; 4]$. Zakreslete daný vektor a zapište jej.

Příklad 2: Vektor $\vec{u} = (2; 3)$ je tvořen body $A[6; 6]$ a $B[b_1; b_2]$. Zjistěte souřadnice bodu B .

Příklad 3: Je dán vektor $\vec{v} = (-3; 4)$ a jeho koncový bod $B[-2; 3]$. Zjistěte souřadnice počátečního bodu A .

Příklad 4: Rozhodněte, zda orientované úsečky AB a CD určené body $A[3; 5]$, $B[2; 0]$, $C[1; 2]$ a $D[-1; 2]$ určují v rovině stejný vektor.

Velikost vektoru

Podle Pythagorovy věty platí: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

Příklad: Vypočítejte velikost vektoru $|\vec{u}|$ zadaného body $A[2; 1]$ a $B[6; 5]$.

Příklad 1: Vypočítejte vzdálenost bodů $C[3; 3]$ a $D[2; -1]$.

Příklad 2: Vypočítejte velikost vektoru $\vec{u} = (-6; 4)$.

Příklad 3: Jsou dány body $E[1; 3]$, $F[-1; x]$. Určete číslo x tak, aby $|EF| = 2$.

Příklad 4: Porovnejte velikosti a směr vektorů $\vec{u} = (-4; 3)$ a $\vec{v} = (4; -3)$. Jsou tyto vektory shodné?

Opačný vektor

Zapíšeme x -ové a y -ové složky opačným číslem.

Příklad 5: Vypočítejte obvod trojúhelníku ABC , kde $A[-2; 2]$, $B[5; -3]$, $C[4; 3]$. Rozhodněte, zda je pravoúhlý.

Vektor – střed úsečky

$$S\left[\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right]$$

Příklad: Vypočítejte střed úsečky AB , je-li $A[1; 3]$, $B[3; 1]$.

Příklad: Vypočítejte délku těžnice na stranu a v trojúhelníku ABC , kde $A[0; 0]$, $B[5; 1]$, $C[4; 4]$.

Součet vektorů

Pro dva vektory $\vec{u} = (u_1; u_2)$, $\vec{v} = (v_1; v_2)$ platí:
$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$$

Příklad: Vypočítejte součet vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$, jestliže $\vec{u} = (2; 2)$ a $\vec{v}$ je určen orientovanou úsečkou AC , je-li $A[1; 1]$, $C[4; 0]$.

Rozdíl vektorů

Rozdíl vektorů je součet vektoru s vektorem opačným.

Pro každé dva vektory v rovině $\vec{u} = (u_1; u_2)$, $\vec{v} = (v_1; v_2)$ platí:
$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2)$$

Příklad: Jestliže $AB = \vec{u} = (3; 2)$ a $AC = \vec{v} = (3; 1)$, jaký je rozdíl vektorů $\vec{w}$?

Příklad 1: Vypočítejte rozdíl vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$, jestliže $\vec{u} = (2; 0)$ a $\vec{v}$ je určen orientovanou úsečkou CB , je-li $C[3; 2], B[0; 0]$.

Příklad 2: Určete součet a rozdíl vektorů $\vec{a} = AB, \vec{b} = CD$, je-li dáno:
 $A[3; -1], B[4; 2], C[-1; -5], D[-2; -1]$.
Vše znázorněte graficky.

Násobení vektoru číslem

$$k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1; k \cdot u_2)$$

Příklad 1: Vypočítejte dvojnásobek vektoru $\vec{u} = (2; 1)$.

Příklad 2: Vypočítejte polovinu, dvojnásobek a vektor opačný k vektoru $\vec{AB} = (2; 3)$.

SHRNUTÍ:

Příklad 1: Jsou dány body $A[7; 4], B[-3; 3]$. Určete:
a) souřadnice vektoru $\vec{u} = AB$ a jeho velikost
b) souřadnice vektoru $\vec{v} = BA$ a jeho velikost

Příklad 2: Vypočítejte souřadnice vektoru daného dvěma body a určete jeho velikost. Načrtněte v kartézské soustavě souřadnic Oxy :
a) $\vec{p} = PQ, P[-4; 2], Q[-1; -3]$
b) $\vec{m} = MN, M[1; 4], N[-2; 8]$

Příklad 3: Určete součet a rozdíl vektorů $\vec{a} = AB, \vec{b} = CD$, je-li dáno:
 $A[3; -1], B[4; 2], C[-1; -5], D[-2; -1]$.
Dále určete vektory opačné a trojnásobky vektorů.
Vše znázorněte graficky.

Příklad 4: Trojúhelník KLM je dán body. $K[-4; -2], L[8; -2], M[8; 3]$.
a) Určete, zda je trojúhelník KLM rovnoramenný.
b) Určete, zda je trojúhelník KLM pravoúhlý.
c) Vypočtete velikosti vnitřních úhlů.

Opakování:

Příklad 1: Vypočítejte velikost vektoru $|\vec{a}|$ zadaného body $A[0; 2]$ a $B[2; 1]$.

Příklad 2: Vypočítejte obvod trojúhelníku PQR , kde
 $P[-1; -1], Q[1; -6], R[1; 3]$.
Je tento trojúhelník rovnoramenný?

Příklad 3: Vypočítejte vzdálenost bodů $C[-2; 4]$ a $D[5; -1]$.

Příklad 4: Vypočítejte velikost vektoru $\vec{u} = (-8; 3)$.

Příklad 5: Jsou dány body $A[2; -6], B[x; -3]$. Určete číslo x tak, aby vzdálenost bodů A a B byla $\sqrt{10}$.

Příklad 6: Porovnejte velikosti a směr vektorů $\vec{u} = (8; -3)$ a $\vec{v} = AB$,
 $A[-4; 2], B[4; 5]$. Jsou tyto vektory shodné?

Příklad 7: Jsou dány dva body v rovině $A[-4; 2]$ a $B[x; y]$. Bod $S[-0,5; -1,5]$ leží v polovině mezi body A, B .

DALŠÍ PŘÍKLADY:

Příklad 1: Jsou dány body A, B . Vypočítejte vektor $\vec{u}$ s počátečním bodem A a koncovým bodem B .

- a) $A[5; -2]$ a $B[7; 3]$,
- b) $A[4; -5]$ a $B[8; 0]$,
- c) $A[-3; 4]$ a $B[0; -1]$,
- d) $A[1; 6]$ a $B[-2; 2]$.

Příklad 2: Vypočítejte velikost vektoru $|\vec{u}|$ zadaného body:

- a) $A[8; 3]$ a $B[6; 5]$,
- b) $A[9; 7]$ a $B[14; 0]$,
- c) $A[6; 3]$ a $B[7; 1]$,
- d) $A[4; 1]$ a $B[-1; 4]$,
- e) $A[2; 5]$ a $B[3; 2]$,
- f) $A[-1; 2]$ a $B[-4; -1]$.

Příklad 3: Určete součet a rozdíl vektorů $\vec{a} = AB$, $\vec{b} = CD$, je-li dáno:

- a) $A[3; 4], B[5; 2], C[1; 3], D[6; 0]$,
- b) $A[1; 0], B[6; 3], C[2; 5], D[4; 4]$,
- c) $A[6; 3], B[8; 7], C[9; 1], D[6; 3]$,
- d) $A[4; -1], B[3; 5], C[-2; 2], D[1; 6]$,
- e) $A[0; -5], B[-2; -3], C[4; -4], D[5; 2]$,
- f) $A[-1; 2], B[7; 4], C[3; 3], D[8; 5]$.

Příklad 4: Je dán vektor $\vec{a} = AB$. Určete vektor opačný a čtyřnásobek vektoru.

- a) $A[1; 3], B[4; -1]$,
- b) $A[-5; 4], B[-2; 6]$,
- c) $A[7; 1], B[0; 2]$,
- d) $A[3; -2], B[5; 8]$.

Příklad 5: Vypočítejte délku těžnice na stranu a v trojúhelníku ABC , kde:

- a) $A[4; 9], B[1; -2], C[3; 6]$,
- b) $A[3; -7], B[5; 4], C[1; 0]$,
- c) $A[2; 1], B[7; 3], C[9; -1]$,
- d) $A[1; 1], B[6; -3], C[4; 11]$.

SBÍRKA ÚLOH pro gymnázia (Analytická geometrie):

- 1.23 Určete, který z bodů $A[0; 3]$, $B[-2; 2]$, $C[-1; 3]$ má největší vzdálenost od bodu $M[1; -2]$.
- 1.26 Na ose x určete bod tak, aby jeho vzdálenost od bodu $A[-2; 8]$ byla 10.
- 1.29 Vypočítejte délky stran trojúhelníku ABC a rozhodněte, zda je pravoúhlý, je-li dáno:
- $A[-1; 1]$, $B[3; 1]$, $C[-1; 4]$
 - $A[2; 3]$, $B[5; 4]$, $C[5; -1]$
 - $A[3; 1]$, $B[4; -1]$, $C[5; 2]$
- 1.38 Jsou dány body A, S . Vypočítejte souřadnice bodu B tak, aby bod S byl střed úsečky AB .
- $A[4; -5]$, $S[-3; 2]$
 - $A\left[1; -\frac{1}{2}\right]$, $S\left[\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right]$
- 1.40 Určete bod D tak, aby obrazec $ABCD$ byl rovnoběžník, je-li dáno:
 $A[1; -2]$, $B[5; 1]$, $C[-3; 4]$
- 2.7 Zjistěte, zda orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ je umístěním vektoru $\vec{u} = (5; -3)$, je-li dáno:
- $A[-3; 2]$, $B[2; -1]$
 - $A[-1; -1]$, $B[4; -2]$
 - $A[-8; -2]$, $B[-3; 1]$
 - $A[-6; 5]$, $B[-1; 2]$
- 2.9 Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ je umístěním vektoru $\vec{u}$. Určete souřadnice koncového bodu B , je-li dáno:
- $A[1; 7]$, $\vec{u} = (3; -8)$
 - $A[-5; 2]$, $\vec{u} = (-1; 3)$
 - $A[-6; 11]$, $\vec{u} = (6; 9)$
 - $A[-7; -4]$, $\vec{u} = (-3; -5)$
- 2.11 Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ je umístěním vektoru $\vec{u}$. Určete souřadnice počátečního bodu A , je-li dáno:
- $B[3; 15]$, $\vec{u} = (1; 8)$
 - $B[4; -6]$, $\vec{u} = (7; 3)$
 - $B[-7; 9]$, $\vec{u} = (3; -4)$
 - $B[-5; -8]$, $\vec{u} = (-3; -6)$
- 2.13 Určete čísla r, s tak, aby platilo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
- $A[5; -2]$, $B[1; r]$, $\vec{u} = (s; -3)$
 - $A[r; -3]$, $B[4; -1]$, $\vec{u} = (-2; s)$
 - $A[-3; -5]$, $B[r - 3; -2]$, $\vec{u} = (2; s)$
 - $A[2r - 3; 6]$, $B[4 - r; -3]$, $\vec{u} = (-5; s)$
- 2.16 Vypočítejte součty a rozdíly vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, je-li dáno:
- $\vec{u} = (6; -5)$, $\vec{v} = (4; 3)$
 - $\vec{u} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right)$, $\vec{v} = \left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{10}\right)$
- 2.23 Určete souřadnice bodu D tak, aby orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ byly umístěním dvou navzájem opačných vektorů:
- $A[3; -2]$, $B[-5; 4]$, $C[-4; -6]$
- 2.24 Jsou dány vektory $\vec{u} = (3; -5)$, $\vec{v} = (-2; 6)$. Vypočítejte souřadnice vektorů
- | | | |
|-------------------------|--------------------------|--|
| a) $2\vec{u}$ | c) $\vec{u} - 4\vec{v}$ | e) $\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}$ |
| b) $\frac{1}{2}\vec{u}$ | d) $3\vec{u} + 2\vec{v}$ | f) $2(\vec{u} - \vec{v}) - 3(\vec{u} + \vec{v})$ |
- 2.48 Zjistěte, zda dané tři body leží v přímce:
- $A[-3; 2]$, $B[-7; -4]$, $C[-1; 5]$
 - $A[4; 5]$, $B[-2; 8]$, $C[7; -1]$