

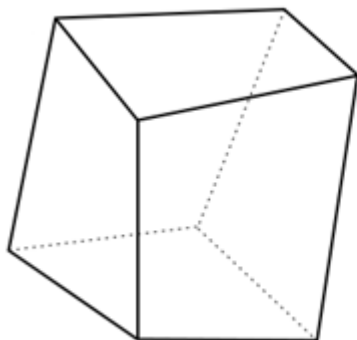
STEREOMETRIE – TĚLESA

(povrch a objem těles)

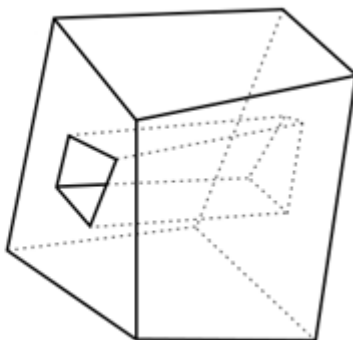
Mnohostěny

- **hrana** = úsečka
- **vrchol** = bod (3 hrany – průsečík)
- **stěna** = daný n-úhelník
- **úhlopříčka** – tělesová = skrze celé těleso
– stěnová = 2 body v 1 stěně (ne vedle sebe)

konvexní mnohostěn



nekonvexní mnohostěn



Pravidelné mnohostěny

- **tetraedr** (čtyřstěn = čtyři stejné rovnostranné trojúhelníky)
- **hexaedr** (krychle = šest stejných čtverců)
- **oktaedr** (osmistěn = osm stejných rovnostranných trojúhelníků)
- **dodekaedr** (dvanáctistěn = dvanáct stejných pravidelných pětiúhelníků)
- **ikosaedr** (dvacetistěn = dvacet stejných rovnostranných trojúhelníků)

Eulerova věta

= vztah mezi počtem vrcholů, hran a stěn konvexního mnohostěnu

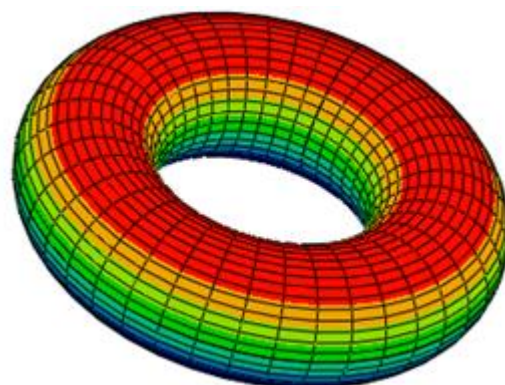
$$s + v = h + 2$$

těleso	počet stěn	počet vrcholů	počet hran	$s + v - h$
krychle	6	8	12	$6+8-12=2$
čtyřboký jehlan	5	5	8	$5+5-8=2$
oktaedr	8	6	12	$8+6-12=2$
komolý šestiboký jehlan	8	12	18	$8+12-18=2$
pětiboký hranol	7	10	15	$7+10-15=2$

Rotační tělesa

- **rotační válec** = rotací obdélníku
- **rotační kužel** = rotací pravoúhlého trojúhelníku
- **komolý rotační kužel** = rotací pravoúhlého lichoběžníku
- **koule** = rotací polokruhu

- kulový vrchlík
- kulová úseč
- kulová výseč
- kulový pás
- kulová vrstva
- anuloid (Torus) = rotací kruhu



Objemy a povrchy těles

OBJEM = udává, jak velký prostor těleso zabírá
např.: kolik kapaliny se vejde do nádoby
kolik aut potřebuji k odvezení hromady písku
kolik m^3 vzduchu je ve třídě

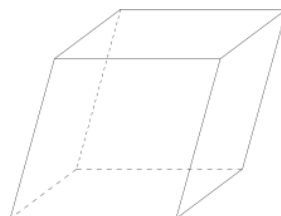
POVRCH = je to obsah plochy, kterou je těleso ohraničeno
např.: množství látky na výrobu stanu
množství barvy na natření tělesa (místnosti)
množství palubek k obložení místnosti

Hranoly

= podstavy jsou dva shodné mnohoúhelníky + plášť

- **kolmý** (krychle, kvádr, pravidelný hranol, nepravidelné hranoly)
- **kosý** (zešikmený – např. klenec)

Př.: rovnoběžnostěn – krychle, kvádr nebo klenec (klenec = 6 kosočtverců)



objem hranolu: $V = S_{podstavy} \cdot v$

povrch hranolu: $S = 2 \cdot S_{podstavy} + S_{plášť}$

(S_p = obsah podstavy, v = výška, S_{pl} = obsah pláště)

1) KRYCHLE

objem: $V = S_p \cdot v = a^2 \cdot a = a^3$

povrch: $S = 2S_p + S_{pl} = 2a^2 + 4a^2 = 6a^2$

tělesová úhlopříčka: $u_t = a \cdot \sqrt{3}$

stěnová úhlopříčka: $u_s = a \cdot \sqrt{2}$

2) KVÁDR

objem: $V = S_p \cdot v = ab \cdot c = abc$

povrch: $S = 2S_p + S_{pl} = 2(ab + ac + bc)$

tělesová úhlopříčka: $u_t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

stěnová úhlopříčka: $u_s = \sqrt{a^2 + b^2}$

3) PRAVIDELNÝ HRANOL

objem: $V = S_p \cdot v$

povrch: $S = 2S_p + S_{pl}$

} podstavou je
pravidelný
mnohoúhelník

4) NEPRAVIDELNÉ HRANOLY a KOSÉ HRANOLY

Příklady: Krychle = pravidelný čtyřboký hranol; všechny hrany mají stejnou délku

1) Vypočítej objem a povrch krychle o velikosti hrany:

a) $a = 4 \text{ cm}$

b) $a = 1,2 \text{ dm}$

c) $a = 0,4 \text{ m}$

2) Kolik vody se vejde do nádoby tvaru krychle o hraně 6 cm ?

3) Jaký je povrch krychle v m^2 , je-li její objem

a) 8 m^3

b) 216 cm^3

4) Jaký je objem krychle v m^3 , je-li její povrch

a) 384 dm^2

b) 29400 cm^2

5) Zásobník tvaru krychle bez víka má mít objem 80 l . Kolik m^2 plechu je třeba na jeho výrobu, je-li 12% odpad?

b) $V = 80 \text{ hl}$

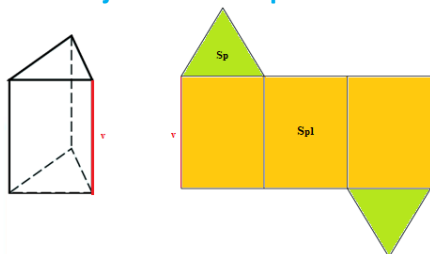
Příklady: Kvádr = čtyřboký hranol, jehož podstava je obdélník nebo čtverec

- 1) Kolik m^2 plechu potřebuji na výrobu krabice o hranách 6, 4, 8 [cm]?
Jaký je objem této krabice (v l)?
- 2) Jaká je výška kváдру, je-li jeho objem $2,56 m^3$ a délky hran podstavy 3,2 m a 1,6 m?
- 3) Vypočítej povrch a objem kváдру o rozměrech
 $a = 0,7 dm, b = 0,3 dm, c = 10 cm$. Výsledek v cm i dm.

Příklady: HRANOL

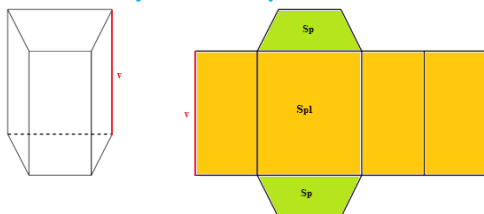
- 1) * Vypočítej objem a povrch pravidelného čtyřbokého hranolu, jehož výška $v = 28,6 cm$ a tělesová úhlopříčka svírá s rovinou podstavy úhel 50° .
- 2) * Vypočítej objem a povrch pravidelného čtyřbokého hranolu o podstavě hraně $a = 24 cm$, jestliže tělesová úhlopříčka svírá s podstavou úhel 66° .
- 3) * Podstavou čtyřbokého hranolu je kosočtverec, který má úhlopříčky 7 cm a 9 cm. Výška hranolu je 22 cm. Vypočítej jeho objem a povrch.
- 4) * Určete objem trojbokého hranolu, jehož podstava má strany $a = 4,48$; $b = 5,45$; $c = 7,25$ a jehož výška je $v = 17,8 cm$.
- 5) * Vypočítej objem a povrch pravidelného pětibokého hranolu, jehož podstavná hrana je $a = 6,6 cm$ a výška $v = 8,8 cm$.
- 6) * Vypočítej objem a povrch pravidelného osmibokého hranolu, jehož podstavě lze opsat kružnici o poloměru $r = 16 m$ a jehož výška je 33 m.
- 7) Povrch kváдру je $304 m^2$, jeho rozměry jsou v poměru 2 : 4 : 5.
Urči jeho objem.
- 8) Objem kváдру je $810 cm^3$. Rozměry jsou v poměru 2 : 3 : 5.
Urči jeho povrch.
- 9) Objem kváдру je $672 m^3$. Rozměry jsou v poměru 3 : 4 : 7.
Určete velikost stran. (stěnových úhlopříček)
- 10) a) Povrch kváдру $S = 288 m^2$; rozměry v poměru 2 : 3 : 6. $V = ?$
b) $S = 328 m^2$; 2 : 3 : 7; $V = ?$
c) $S = 488 cm^2$; 3 : 4 : 7; $V = ?$

Příklady: Kolmý hranol s trojúhelníkovou podstavou



- 1) Vypočítej objem a povrch trojbokého kolmého hranolu s podstavou pravoúhlého trojúhelníku, pokud délky odvěsen základny jsou $7,2\text{ cm}$ a $4,7\text{ cm}$, výška hranolu je 24 cm .
- 2) Podstavou trojbokého hranolu je pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny mají délky 6 dm a $0,8\text{ m}$. Výška hranolu je 200 cm . Vypočítejte objem a povrch hranolu.
- 3) Vypočítej objem a povrch trojbokého kolmého hranolu s podstavou rovnostranného trojúhelníku. Hrana podstavy měří 15 cm . Výška hranolu je 13 cm .
- 4) Vypočítej objem a povrch trojbokého kolmého hranolu s podstavou rovnoramenného trojúhelníku. Základna podstavy měří 16 cm , rameno 10 cm . Výška hranolu je 20 cm .
- 5) Vypočítej objem a povrch trojbokého kolmého hranolu s podstavou rovnoramenného trojúhelníku. Základna podstavy měří 20 cm , výška na základnu 15 cm . Výška hranolu je 13 cm .

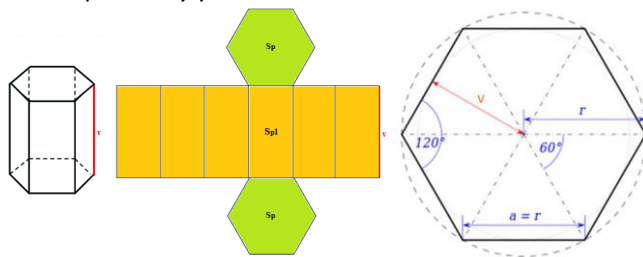
Příklady: Kolmý hranol se čtyřhrannou podstavou



- 1) Vypočítejte povrch a objem hranolu, který má výšku 21 cm a jehož podstavou je kosočtverec s délkou strany 16 cm a výškou 8 cm .
- 2) Vypočítejte povrch a objem hranolu, který má výšku 30 cm a jehož podstavou je kosodélník s délkami stran 10 cm a 5 cm a výškou na delší stranu 8 cm .
- 3) Vypočítejte povrch a objem hranolu s výškou 15 cm , jehož podstava je pravoúhlý lichoběžník s délkami základen 20 cm a 15 cm , délky ramen jsou 8 cm a 10 cm .
- 4) Podstava kolmého hranolu je rovnoramenný lichoběžník, jehož základny mají délky 16 cm a 20 cm a výška 15 cm . Vypočítejte objem a povrch hranolu, je-li jeho výška 50 cm .
- 5) Vypočítejte povrch a objem hranolu s výškou 21 cm , jehož podstava je rovnoramenný lichoběžník s délkami základen 25 cm a 13 cm , délka ramene je 8 cm .
- 6) Vypočítejte povrch a objem hranolu, který má výšku 20 cm a jehož podstavou je kosočtverec s délkou strany 10 cm a výškou 5 cm .

Příklady: Kolmý hranol s šestiúhelníkovou podstavou

U šestiúhelníkové podstavy platí:



- 1) Vypočítejte povrch a objem pravidelného šestibokého hranolu vysokého 60 cm . Hrana šestiúhelníkové podstavy měří 4 cm .
- 2) Vypočítejte povrch a objem pravidelného šestibokého hranolu vysokého 75 cm . Hrana šestiúhelníkové podstavy měří 8 cm .
- 3) Vypočítejte povrch a objem pravidelného šestibokého hranolu vysokého 5 dm . Hrana šestiúhelníkové podstavy měří 10 cm .

Opakování:

Příklady: Krychle

- 1) Vypočítej objem a povrch krychle o velikosti hrany:
 - a) $a = 7\text{ cm}$
 - b) $a = 3,4\text{ dm}$
 - c) $a = 0,6\text{ m}$
- 2) Kolik vody se vejde do nádoby tvaru krychle o hraně 13 cm ?
- 3) Jaký je povrch krychle v m^2 , je-li její objem
 - a) 125 dm^3
 - b) 729 mm^3
- 4) Jaký je objem krychle v m^3 , je-li její povrch
 - a) 15000 cm^2
 - b) 486 dm^2

Příklady: Kvádr

- 1) Kolik m^2 plechu potřebuji na výrobu krabice o hranách $7, 5, 8\text{ [cm]}$? Jaký je objem této krabice (v l)?
- 2) Jaká je výška kváдру, je-li jeho objem $95,94\text{ m}^3$ a délky hran podstavy $4,1\text{ m}$ a $2,6\text{ m}$?
- 3) Vypočítej povrch a objem kváдру o rozměrech $a = 0,25\text{ dm}$, $b = 120\text{ mm}$, $c = 9\text{ cm}$.
- 4) Kolik litrů vody se vejde do nádoby tvaru kváдру o rozměrech $a = 30\text{ cm}$, $b = 4,5\text{ dm}$, $c = 620\text{ mm}$?

Rotační válec

= 2x kruhová podstava + plášť

objem válce: $V = \pi r^2 \cdot v$

povrch válce: $S = 2S_p + S_{pl} = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r(r + v)$

tělesová úhlopříčka: $u_t = \sqrt{v^2 + d^2}$

$S_p = \pi r^2$

$S_{pl} = 2\pi r \cdot v$

UŽ UMÍME:

$S = \pi r^2$ obsah kruhu

$o = 2\pi r$ obvod kruhu

$= \pi d$ (délka kružnice)

$d = 2 \cdot r$ $d = \text{průměr}$

$r = \frac{d}{2}$ $r = \text{poloměr}$

$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$

Příklady: Válec

- 1) Kolik litrů vody se vejde do válcové nádoby o výšce 15 cm, jejíž podstava má průměr 36 cm?
- 2) Obvod dna válce je 31,4 cm, výška válce 2 dm. Vypočítej povrch a objem.
- 3) Válcová cisterna délky 6 m obsahuje 35 m³ oleje. Jaký je její vnitřní průměr?
- 4) Z obdélníku o rozměrech 6 cm a 4 cm jsme svinuli plášť rotačního válce o výšce 4 cm. Určete objem válce.
- 5) V rotačním válci je dáno
 - a) $r = 8,6 \text{ cm}$, $v = 15,9 \text{ cm}$; vypočítej S a V.
 - b) $V = 498 \text{ cm}^3$, $r = 8,5 \text{ cm}$; vypočítej S.
 - c) $V = 120 \text{ cm}^3$, $v = 6,4 \text{ cm}$; vypočítej r a S.
- 6) Obvod podstavy rotačního válce je stejně velký jako jeho výška. Jaký je povrch válce, když jeho objem je 250 dm³?
- 7) V rotačním válci je dáno
 - a) $d = 18,8 \text{ cm}$, $v = 12,3 \text{ cm}$; vypočítej S a V.
 - b) $r = 12 \text{ dm}$, $v = 3 \text{ m}$; vypočítej S a V.
 - c) $V = 1080 \text{ cm}^3$, $v = 3 \text{ dm}$; vypočítej r a S.
 - d) $V = 5 \text{ m}^3$, $r = 250 \text{ mm}$; vypočítej v a S.
 - e) $S = 60 \text{ dm}^2$, $r = 21 \text{ cm}$; vypočítej v a V.
 - f) $S = 324 \text{ cm}^2$, $v = 20 \text{ cm}$; vypočítej r a V.

Opakování:

- 1) Kolik litrů vody se vejde do válcové nádoby o výšce 18 cm , jejíž podstava má průměr 54 cm ?
- 2) Obvod dna válce je $31,4\text{ cm}$, výška válce 5 dm .
Vypočítej povrch a objem.
- 3) Válcová cisterna délky 8 m obsahuje 226 m^3 oleje.
Jaký je její vnitřní průměr?
- 4) Z obdélníku o rozměrech 5 cm a 3 cm jsme svinuli plášť rotačního válce o výšce 5 cm . Určete objem válce.
- 5) V rotačním válci je dáno:
 - a) $r = 12\text{ cm}$, $v = 16,5\text{ cm}$; vypočítej S a V .
 - b) $d = 14,8\text{ cm}$, $v = 20\text{ cm}$; vypočítej S a V .
 - c) $V = 123088\text{ cm}^3$, $v = 5\text{ dm}$; vypočítej r a S .
 - d) $V = 2,77\text{ m}^3$, $r = 840\text{ mm}$; vypočítej v a S .
 - e) $S = 884,7892\text{ dm}^2$, $r = 73\text{ cm}$; vypočítej v a V .
 - f) $S = 55264\text{ cm}^2$, $v = 30\text{ cm}$; vypočítej r a V .

Jehlan a komolý jehlan

podstava = mnohoúhelník

plášť = skládá se z rovnoramenných trojúhelníků

Pravidelný jehlan má za podstavu pravidelný mnohoúhelník:

a) pravidelný TROJBOKÝ jehlan = podstava je ROVNOSTRANNÝ trojúhelník

b) pravidelný ČTYŘBOKÝ jehlan = podstava je ČTVEREC

c) pravidelný ČTYŘSTĚN = pravidelný trojboký jehlan, jehož všechny 4 stěny jsou rovnostranné trojúhelníky

objem jehlanu: $V = \frac{1}{3}Sp \cdot v$

povrch jehlanu: $S = Sp + Spl = Sp + n \cdot \frac{a \cdot v_a}{2}$

UŽ UMÍME:

$S_{\Delta} = \frac{1}{2}a \cdot v_a$ obsah trojúhelníku

$v_a = \sqrt{v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ výška na stranu a

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v$ objem pravidelného čtyřbokého jehlanu

$S = a^2 + 4 \cdot S_{\Delta}$ povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu

Příklady: Jehlan

- 1) Jehlan má podstavu čtverce o hraně 7 m výška je 3 m. Vypočítej objem a povrch.
- 2) Jehlan má podstavu čtverce o hraně 0,8 m výška je 1,2 m. Vypočítej objem a povrch.
- 3) Vypočítej, kolik m^2 plechu potřebuji na pokrytí střechy věže tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu. Podstavná hrana je 5 m a výška 10 m. Odpad tvoří 5%.
- 4) Urči objem pravidelného trojbokého jehlanu, která má podstavou hranu 5 dm a výšku 1 m.
- 5) Urči objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu o podstavné hraně $a = 13,4$ cm a výšce $v = 16,9$ cm.
- 6) * Urči objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu o podstavné hraně $a = 84$ m a boční hraně $b = 130$ m.
- 7) * Urči objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu o boční hraně $b = 7,4$ cm a výšce $v = 5,9$ cm.

Další příklady:

- 1) Jehlan má podstavu čtverce o hraně 5 cm výška je 7 cm. Vypočítej objem a povrch.
- 2) Jehlan má podstavu čtverce o hraně 6 m výška je 10 m. Vypočítej objem a povrch.
- 3) Urči objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu o podstavné hraně $a = 8$ dm a výšce $v = 5$ dm.
- 4) Jehlan má podstavu čtverce o hraně 16 cm výška je 60 mm. Vypočítej objem a povrch.

- 5) Urči objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu o podstavné hraně $a = 20 \text{ cm}$ a výšce $v = 30 \text{ mm}$.
- 6) Jehlan má podstavu čtverce o hraně 4 m výška je 114 cm . Vypočítej objem a povrch.
- 7) Urči objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu o podstavné hraně $a = 17 \text{ dm}$ a výšce $v = 2700 \text{ mm}$.
- 8) Jehlan má podstavu čtverce o hraně 320 mm výška je 45 cm . Vypočítej objem a povrch.
- 9) Urči objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu o podstavné hraně $a = 50 \text{ cm}$ a výšce $v = 800 \text{ mm}$.
- 10) Jehlan má podstavu čtverce o hraně 400 cm výška je 9 m . Vypočítej objem a povrch.

*** Komolý jehlan (jehlan s uříznutým vrškem)**

$$V = \frac{v}{3} (Sp_1 + \sqrt{Sp_1 \cdot Sp_2} + Sp_2)$$

$$S = Sp_1 + Sp_2 + Spl$$

Plášť tvoří n lichoběžníků $Spl = n \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot v_a$

*** Příklad 1:** Vypočítej objem a povrch pravidelného komolého čtyřbokého jehlanu o podstavných hranách $a = 16 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$, jehož výška je $v = 15 \text{ cm}$.

*** Příklad 2:** Vypočítejte povrch a objem pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, je-li hrana dolní podstavy 18 cm a hrana horní podstavy 15 cm . Stěnová výška je 9 cm .

*** Příklad 3:** Kolik krychlových metrů má objem pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu s hranami podstav jeden metr a 60 cm a vysokého 250 mm ?

*** Příklad 4:** Vypočítejte povrch a objem pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, jsou-li hrany podstavy 87 cm a 64 cm a stěnová výška je 49 cm .

*** Příklad 5:** Vypočítejte objem a povrch pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, jehož hrany podstav jsou $a_1 = 15 \text{ cm}$ a $a_2 = 4 \text{ cm}$. Boční hrana má velikost $h = 15 \text{ cm}$.

*** Příklad 6:** Vypočítejte povrch betonového podstavce ve tvaru pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, jehož výška je $0,12 \text{ m}$ a podstavy mají délky hran $0,24 \text{ m}$ a $0,16 \text{ m}$.

*** Příklad 7:** Jáma má tvar pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, podstavné hrany mají délky 14 m a 10 m , odchylka pobočné stěny od menší podstavy je 135° . Vypočítejte, kolik m^3 zeminy bylo vykopáno.

*** Příklad 8:** Určete objem a povrch nádoby tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu (pro povrch počítejte pouze dno), jestliže podstavy mají délky $0,3\text{ m}$ a $1,8\text{ m}$ a délka pobočné hrany je $h = 1,2\text{ m}$.

Opakování:

- 1) Jehlan má podstavu čtverce o hraně 4 cm výška je 8 cm .
Vypočítej objem a povrch.
- 2) Jehlan má podstavu čtverce o hraně 5 m výška je 9 m .
Vypočítej objem a povrch.
- 3) Urči objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu o podstavné hraně $a = 7\text{ dm}$ a výšce $v = 4\text{ dm}$.
- 4) Jehlan má podstavu čtverce o hraně 18 cm výška je 80 mm .
Vypočítej objem a povrch.
- 5) Urči objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu o podstavné hraně $a = 30\text{ cm}$ a výšce $v = 50\text{ mm}$.
- 6) Jehlan má podstavu čtverce o hraně 3 m výška je 116 cm .
Vypočítej objem a povrch.
- 7) Urči objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu o podstavné hraně $a = 19\text{ dm}$ a výšce $v = 2800\text{ mm}$.
- 8) Jehlan má podstavu čtverce o hraně 310 mm výška je 35 cm .
Vypočítej objem a povrch.
- 9) Urči objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu o podstavné hraně $a = 60\text{ cm}$ a výšce $v = 1200\text{ mm}$.
- 10) Jehlan má podstavu čtverce o hraně 200 cm výška je 5 m .
Vypočítej objem a povrch.

PRAVIDELNÝ N-STĚN (mnohostěn = oktaedr, dodekaedr, ...)

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot \rho$$

ρ = poloměr kulové plochy mnohostěnu vepsané

$$S = n \cdot S_{\text{stěny}}$$

Kužel a komolý kužel

podstava je kruhová

plášť = kruhová výseč

objem kužele: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot v$

povrch kužele: $S = \pi r (r + s) = \pi r^2 + \pi r s$

strana s $s = \sqrt{v^2 + r^2}$

UŽ UMÍME:

s = strana kužele

$S = \pi r^2$ obsah kruhu

$S = \pi r s$ kruhová výseč

Příklady: Kužel

- 1) Vypočítej objem a povrch kužele, který vznikne rotací pravoúhlého ΔABC s odvěsnami $a = 12\text{ cm}$, $b = 5\text{ cm}$ kolem přímky BC.
- 2) Vypočítej objem a povrch rotačního kužele o poloměru podstavy $r = 6\text{ cm}$ a výšce $v = 12\text{ cm}$.
- 3) Vypočítej objem a povrch rotačního kužele, který má poloměr podstavy $r = 9,6\text{ cm}$ a stranu $s = 14\text{ cm}$.
- 4) * Vypočítejte objem a povrch rotačního kužele, jehož strana $s = 4,8\text{ cm}$ svírá s rovinou podstavy úhel $\varphi = 48^\circ 44'$.

Další příklady:

- 1) Vypočítej objem a povrch rotačního kužele o poloměru podstavy $r = 10\text{ mm}$ a výšce $v = 15\text{ mm}$.
- 2) Vypočítej objem a povrch rotačního kužele, který má průměr podstavy $d = 50\text{ cm}$ a výšku $v = 30\text{ cm}$.
- 3) Vypočítej objem a povrch rotačního kužele o průměru podstavy $d = 16\text{ m}$ a výšce $v = 90\text{ dm}$.
- 4) Vypočítej objem a povrch rotačního kužele, který má poloměr podstavy $r = 6\text{ dm}$ a stranu $s = 10\text{ dm}$.
- 5) Vypočítej objem a povrch kužele, který vznikne rotací pravoúhlého ΔABC s odvěsnami $a = 19\text{ cm}$, $b = 11\text{ cm}$ kolem přímky BC.
- 6) Vypočítej objem a povrch rotačního kužele o poloměru podstavy $r = 13\text{ cm}$ a výšce $v = 20\text{ cm}$.
- 7) Vypočítej objem a povrch rotačního kužele o průměru podstavy $d = 8\text{ cm}$ a výšce $v = 75\text{ mm}$.
- 8) Vypočítej objem a povrch rotačního kužele, který má průměr podstavy $d = 100\text{ dm}$ a stranu $s = 12\text{ m}$.
- 9) Vypočítej objem a povrch kužele, který vznikne rotací pravoúhlého ΔABC s odvěsnami $a = 50\text{ dm}$, $b = 350\text{ cm}$ kolem přímky BC.
- 10) Vypočítej objem a povrch rotačního kužele, který má poloměr podstavy $r = 9\text{ cm}$ a stranu $s = 150\text{ mm}$.

* Komolý kužel

h = výška komolého kužele

s = strana komolého kužele

$$s = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$$

$$V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi (r_1 + r_2) \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2} = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi (r_1 + r_2) s$$

$$S = \pi [r_1^2 + r_2^2 + (r_1 + r_2) s]$$

* **Příklad 1:** Povrch rotačního komolého kužele je $S = 7697 \text{ m}^2$. Průměry podstav jsou $d_1 = 56 \text{ m}$ a $d_2 = 42 \text{ m}$. Vypočítejte výšku kužele.

* **Příklad 2:** Vypočítejte objem a povrch komolého rotačního kužele, jsou-li poloměry podstav $r_1 = 8 \text{ cm}$, $r_2 = 5 \text{ cm}$ a odchylka strany kužele od podstavy je $\alpha = 60^\circ$.

* **Příklad 3:** Vypočítejte povrch komolého rotačního kužele, je-li jeho objem $V = 516 \text{ cm}^3$ a poloměry podstav $r_1 = 9,4 \text{ cm}$, $r_2 = 4,2 \text{ cm}$.

* **Příklad 4:** Poloměry podstav komolého rotačního kužele jsou $r_1 = 8 \text{ cm}$, $r_2 = 5 \text{ cm}$, jeho objem je $V = 172\pi \text{ cm}^3$. Určete jeho povrch.

* **Příklad 5:** Poloměry podstav komolého rotačního kužele jsou $r_1 = 7 \text{ cm}$, $r_2 = 3 \text{ cm}$, jeho povrch je $S = 108\pi \text{ cm}^2$. Určete jeho objem.

* **Příklad 6:** Povrch komolého rotačního kužele je $S = 7694 \text{ cm}^2$, průměry podstav jsou 56 cm a 42 cm . Určete výšku kužele.

Opakování:

- 1) Vypočítej objem a povrch rotačního kužele o poloměru podstavy $r = 12 \text{ mm}$ a výšce $v = 20 \text{ mm}$.
- 2) Vypočítej objem a povrch rotačního kužele, který má průměr podstavy $d = 40 \text{ cm}$ a výšku $v = 25 \text{ cm}$.
- 3) Vypočítej objem a povrch rotačního kužele o průměru podstavy $d = 9 \text{ m}$ a výšce $v = 150 \text{ dm}$.
- 4) Vypočítej objem a povrch rotačního kužele, který má poloměr podstavy $r = 15 \text{ dm}$ a stranu $s = 30 \text{ dm}$.
- 5) Vypočítej objem a povrch kužele, který vznikne rotací pravoúhlého $\triangle ABC$ s odvěsnami $a = 25 \text{ cm}$, $b = 14 \text{ cm}$ kolem přímky BC.
- 6) Vypočítej objem a povrch rotačního kužele o poloměru podstavy $r = 15 \text{ cm}$ a výšce $v = 21 \text{ cm}$.
- 7) Vypočítej objem a povrch rotačního kužele o průměru podstavy $d = 9 \text{ cm}$ a výšce $v = 65 \text{ mm}$.
- 8) Vypočítej objem a povrch rotačního kužele, který má průměr podstavy $d = 100 \text{ dm}$ a stranu $s = 5 \text{ m}$.
- 9) Vypočítej objem a povrch kužele, který vznikne rotací pravoúhlého $\triangle ABC$ s odvěsnami $a = 60 \text{ dm}$, $b = 420 \text{ cm}$ kolem přímky BC.
- 10) Vypočítej objem a povrch rotačního kužele, který má poloměr podstavy $r = 8 \text{ cm}$ a stranu $s = 130 \text{ mm}$.

Koule

vzniká rotací kruhu kolem jeho průměru

r = poloměr koule

objem koule: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

povrch koule: $S = 4\pi r^2$

objem polokoule $V = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \frac{4\pi r^3}{6} = \frac{2\pi r^3}{3}$

povrch polokoule $S = \frac{4\pi r^2}{2} = 2\pi r^2$

(bez podstavy)

povrch polokoule $S = \frac{4\pi r^2}{2} + Sp = 2\pi r^2 + \pi r^2$

(s podstavou)

UŽ UMÍME:

$S = \pi r^2$ obsah kruhu

$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ poloměr ze vzorečku pro objem

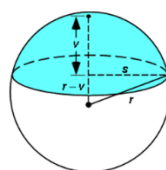
$r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$ poloměr ze vzorečku pro povrch

KULOVÁ ÚSEČ / VRCHLÍK (kulová úseč bez podstavy)

objem kulové úseče: $V = \frac{1}{6}\pi v(3r_1^2 + v^2)$

povrch vrchlíku: $S = 2\pi r v$

povrch kulové úseče: $S = 2\pi r v + \pi r_1^2$

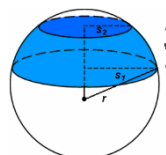


KULOVÁ VRSTVA / PÁS (kulová vrstva bez základen)

objem kulové vrstvy: $V = \frac{1}{6}\pi v(3r_1^2 + 3r_2^2 + v^2)$

povrch kulového pásu: $S = 2\pi r v$

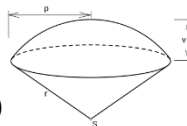
povrch kulové vrstvy: $S = 2\pi r v + \pi(r_1^2 + r_2^2)$



KULOVÁ VÝSEČ (vrchlík a plášť kužele)

objem kulové výseče: $V = \frac{2}{3}\pi r^2 v$

povrch kulové výseče: $S = 2\pi r v + \pi r r_1 = \pi r(2v + r_1)$



Příklady: Koule

- 1) Baňka má tvar koule o vnitřním průměru 32 cm.
Kolik l vody se do ní vejde?
- 2) Střecha hvězdárny má tvar polokoule o průměru 5,6 m.
Kolik m² plechu se spotřebuje na její pokrytí? (10% je odpad)
- 3) Vypočítejte V a S koule o poloměru $r = 10,35$ cm.
- 4) Objem koule je 100 cm³. Určete její povrch.
- 5) Povrch koule je 100 cm². Určete její objem.
- 6) * Vypočítej povrch a objem Země, předpokládáme-li, že má tvar koule s délkou rovníku 40 000 km. (Rovník = čára vedoucí po povrchu kulového tělesa, odděluje obě polokoule, tj. severní a jižní)
- 7) Jaký je objem polokoule o průměru 4 dm? Vypočítej povrch polokoule.
- 8) Model polokoule má průměr 2,4 dm. Jaký je jeho objem a povrch?
- 9) Vypočítej poloměr koule, je-li její povrch
 - a) 4 dm²
 - b) 2,82 cm²

10) Vypočítej průměr koule v cm , je-li její objem

a) 314 cm^3

b) $3,054\text{ l}$

Další příklady:

1) Baňka má tvar koule o vnitřním průměru 186 mm .

Kolik l vody se do ní vejde?

2) Střecha hvězdárny má tvar polokoule o průměru 8 m .

Kolik m^2 plechu se spotřebuje na její pokrytí? (10% je odpad)

3) Vypočítejte V a S koule o poloměru $r = 15,85\text{ dm}$.

4) Objem koule je 1697 dm^3 . Určete její povrch.

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

5) Povrch koule je 1256 m^2 . Určete její objem.

$$r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$$

6) Jaký je objem polokoule o průměru 16 dm ?

Vypočítej povrch polokoule (bez podstavy).

7) Model polokoule má průměr 54 cm . Jaký je jeho objem a povrch?

8) Vypočítej poloměr koule, je-li její povrch 804 cm^2

9) Vypočítej průměr koule v cm , je-li její objem $4,847\text{ l}$

10) Vypočítejte V a S koule o průměru $d = 24\text{ cm}$.

11) Jaký je objem polokoule o poloměru 90 cm ?

Vypočítej také povrch polokoule (s podstavou).

12) Vypočítejte objem a povrch koule o průměru $d = 680\text{ mm}$.

Opakování:

1) Baňka má tvar koule o vnitřním průměru 150 mm .

Kolik l vody se do ní vejde?

2) Střecha hvězdárny má tvar polokoule o průměru 7 m .

Kolik m^2 plechu se spotřebuje na její pokrytí? (15% je odpad)

3) Vypočítejte V a S koule o poloměru $r = 12,75\text{ dm}$.

4) Objem koule je 7235 dm^3 . Určete její povrch.

5) Povrch koule je 2826 m^2 . Určete její objem.

6) Jaký je objem polokoule o průměru 17 dm ?

Vypočítej povrch polokoule (bez podstavy).

7) Model polokoule má průměr 124 cm . Jaký je jeho objem a povrch?

8) Vypočítej poloměr koule, je-li její povrch 314 cm^2

9) Vypočítej průměr koule v cm , je-li její objem $33,494\text{ l}$

10) Vypočítejte V a S koule o průměru $d = 44\text{ cm}$.

- 11) Jaký je objem polokoule o poloměru 770 mm ?
Vypočítej také povrch polokoule (s podstavou).
- 12) Vypočítejte objem a povrch koule o průměru $d = 420 \text{ mm}$.

Kompletní opakování:

- 1) Vypočítejte objem a povrch pravidelného šestibokého hranolu.
Délka podstavné hrany je 4 cm , výška hranolu je 6 cm .
- 2) Vypočítejte objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu, je-li obsah podstavy 20 cm^2 .
Odchylka boční stěny od roviny podstavy je 60° .
- 3) Pravidelný komolý čtyřboký jehlan má podstavné hrany délek 6 cm a 4 cm . Boční strana svírá s rovinou podstavy úhel 60° .
Vypočítej objem a povrch komolého jehlanu.
- 4) Vypočítejte objem a povrch pravidelného rotačního kužele o výšce 10 cm , jehož strana má od roviny podstavy odchylku 30° .
- 5) Určete rozměry válcové nádoby o objemu 5 litrů , jestliže výška se rovná polovině průměru podstavy.
- 6) Do krabice tvaru kváдру se čtvercovou podstavou o straně $a = 6 \text{ cm}$ a výškou $v = 4 \text{ cm}$ dáme kouli o poloměru 3 cm .
Vypočítejte obsah kulového vrchlíku, který leží vně kváдру.

Bonus: Jakou část zemského povrchu vidíme z výšky 350 km nad Zemí?