

STEREOMETRIE – METRICKÉ VLASTNOSTI

Opakování:

PRAVOÚHLÝ TROJÚHELNÍK

Pythagorova věta $c^2 = a^2 + b^2$

Goniometrické funkce $\sin \alpha = \frac{a}{c}$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

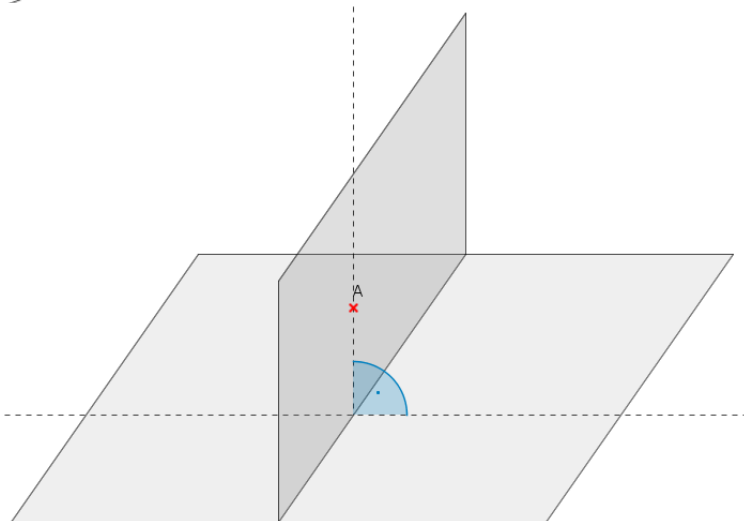
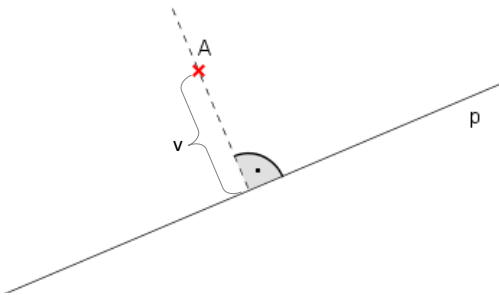
$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$$

OBEČNÝ TROJÚHELNÍK

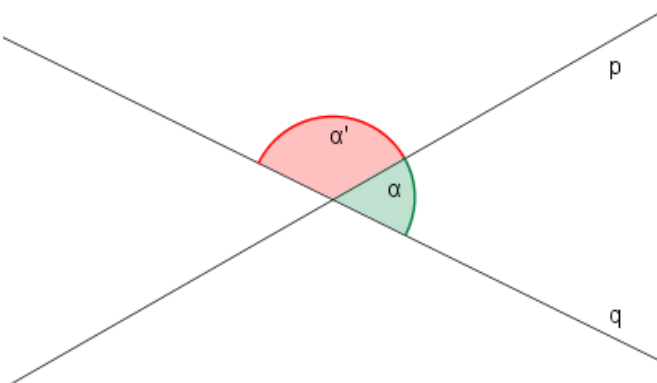
Sinová věta $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

Kosinová věta $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$

vzdálenost bodu od přímky/roviny



odchylka přímek



ODCHYLKA PŘÍMEK (přečíst stranu 58)

- 1) rovnoběžné přímky $\rightarrow$ odchylka 0°
- 2) různoběžné přímky $\rightarrow$ odchylka $\alpha =$ ostrý úhel (nebo pravý úhel)
- 3) mimoběžky $\rightarrow$ převedeme na různoběžné přímky

Příklad: Určete odchylku přímek

- a) AB, AC ,
- b) AC, AH ,
- c) EF, FG ,
- d) BC, EH .

Přímky jsou dány vrcholy krychle $ABCDEFGH$.

Příklad 1: Určete odchylku přímek

- a) AB, EG ,
- b) AH, CF ,
- c) AH, BE .

Přímky jsou dány vrcholy krychle $ABCDEFGH$.

Úlohy: (učebnice strana 62)

3.1 Je dána krychle $ABCDEFGH$ se čtvercovou podstavou. Porovnejte odchylky dvojic přímek

- a) AF, CH a BE, DG ,
- b) AB, CE a BH, AD .

3.2 Je dána krychle s hranou délky a . Určete odchylku

- a) dvou stěnových úhlopříček,
- b) dvou tělesových úhlopříček,
- c) stěnové a tělesové úhlopříčky.

3.3 (zajímavost pro maturanty)

3.4 (zajímavost pro maturanty)

3.5 V kvádru $ABCDEFGH$ s rozměry $|AB| = 6 \text{ cm}$, $|BC| = 3 \text{ cm}$, $|AE| = 8 \text{ cm}$ je bod S středem horní stěny, body M a N jsou po řadě středy hran AE a BF . Vypočítejte odchylku přímek

- a) BE, CG ,
- b) EG, BD ,
- c) AE, BS ,
- d) BM, NG ,
- e) AC, BH ,
- f) AC, BS .

3.7 (zajímavost pro maturanty)

Další příklady:

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Vypočítejte odchylky

- a) AC, CH ,
- b) AC, EC ,
- c) AG, BH ,
- d) AF, CH ,
- e) AE, BH ,
- f) $AS_{EG}, S_{AB}S_{BC}$,
- g) AF, BH ,
- h) DE, BH ,
- i) AC, BH .

Opakování:

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Vypočítejte odchylky

- a) AB a AD ,
- b) AB a BD ,
- c) AD a FG ,
- d) AB a $S_{AE}F$,
- e) AH a BE ,
- f) DE a BG ,
- g) CE a AH ,
- h) AS_{GH} a $S_{AB}E$,
- i) BC a HS_{AE} ,
- j) BH a AG ,
- k) AS_{GH} a $S_{AB}E$.

KOLMOST PŘÍMEK A ROVIN (přečíst strany 63 – 71)

- 1) kolmost přímek
odchylka 90°
- 2) kolmost přímky a roviny
je-li přímka kolmá na rovinu, je kolmá ke všem přímkám té roviny
např.: $\overleftrightarrow{EF}$ a $\overleftrightarrow{BCG}$
- 3) kolmost rovin
jedna rovina obsahuje přímku kolmou k druhé rovině
(resp. k jejím dvěma rovnoběžkám)

Příklad 2: Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zjistěte, zda přímka CE je kolmá k rovině BDG .

Příklad 3: Vrcholem E krychle $ABCDEFGH$ ved'te

- a) přímku kolmou k rovině AFH ,
- b) rovinu kolmou k přímce DF .

Úlohy: (učebnice strana 72)

3.10 Body K, L, M, N jsou po řadě středy hran EH, CD, AE, CG krychle $ABCDEFGH$. Ověřte kolmost přímek a rovin:

- | | | |
|---|---|---|
| a) $\overleftrightarrow{HM}, \overleftrightarrow{EF}$ | b) $\overleftrightarrow{MN}, \overleftrightarrow{BH}$ | c) $\overleftrightarrow{AL}, \overleftrightarrow{BK}$ |
| d) $\overleftrightarrow{FH}, \overleftrightarrow{ACG}$ | e) $\overleftrightarrow{LM}, \overleftrightarrow{ACH}$ | f) $\overleftrightarrow{AL}, \overleftrightarrow{BFK}$ |
| g) $\overleftrightarrow{BCE}, \overleftrightarrow{DGH}$ | h) $\overleftrightarrow{ACK}, \overleftrightarrow{BDH}$ | i) $\overleftrightarrow{ALK}, \overleftrightarrow{BDH}$ |

Patá kolmice

3.14 Je dána krychle $ABCDEFGH$, bod M je středem hrany AB . Určete patu kolmice vedené

- a) bodem E k přímce HF ,
- b) bodem H k přímce CM .

Pravouhlé promítání

- a) promítnutí $\overleftrightarrow{HB}$ do $\overleftrightarrow{ABC}$
- b) promítnutí $\overleftrightarrow{HS_{AB}}$ do $\overleftrightarrow{BCG} = \overleftrightarrow{GB}$

3.21 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete pravouhlý průmět bodu B do roviny

- a) ADH ,
- b) ACG ,
- c) CDE ,
- d) EDG .

3.22 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete pravouhlý průmět přímky DF do roviny

- a) ABC ,
- b) ADH ,
- c) ACG ,
- d) DEG .

ODCHYLKY PŘÍMEK A ROVIN

Odchylka dvou rovin (přečíst rámeček na straně 74)

– odchylka průsečnic s rovinou, která je k oběma kolmá

Úlohy: (učebnice strana 82)

3.26 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete odchylku rovin

- a) ABC, BDH , b) ABE, ABH ,
c) ABC, BEG , d) ACG, BCH .

3.28 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Body P, Q jsou po řadě středy hran BF, DH a body R, T dělí hranu DH na třetiny; bod T je blíže bodu D .

Porovnejte odchylky rovin

- a) ACF, ACH , b) ACP, ACQ ,
c) ACF, ACT , d) ACP, ACR .

Další příklady:

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Vypočtěte odchylku rovin

- a) ABG a BEG 35°16'
b) ABC a $S_{BF}S_{CG}S_{EH}$ 26°34'

Odchylka přímky a roviny (přečíst strany 77 – 78)

Příklad 2: Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete odchylku roviny ABC a přímky

- a) EF , b) BF , c) BH .

Příklad 3: Je dán kvádr $ABCDEFGH$; $|AB| = a = 4,5 \text{ cm}$, $|BC| = b = 3 \text{ cm}$, $|AE| = c = 3,8 \text{ cm}$, bod S je střed horní podstavy. Určete konstrukčně i početně odchylku přímky BS a rovin ABF, BCG .

Příklady:

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete odchylku přímky a roviny:

- a) BH a ABC 35°16'
b) BS_{GH} a ABC 41°49'
c) BH a BCF 35°16'
d) AG a BCG 35°16'
e) AS_{EG} a BDH 35°16'
f) AS_{EG} a CDH 24°06'
g) AS_{EG} a BCF 24°06'
h) CE a CDH 35°16'
i) EC a AGH 54°44'
j) AC a EGS_{CD} 0°

Úlohy: (učebnice strana 82)

3.35 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete odchylku přímky p a roviny ρ :

- a) $p = \overleftrightarrow{XY}, \rho = \overleftrightarrow{ABC}$; bod X je středem hrany EH a bod Y je bodem hrany BF , $|BY|:|YF| = 1:3$,
b) $p = \overleftrightarrow{QR}, \rho = \overleftrightarrow{ABE}$; bod Q je středem hrany BF , bod R je bodem hrany GH tak, že $|HR| = \frac{1}{3}|GH|$,
c) $p = \overleftrightarrow{CE}, \rho = \overleftrightarrow{BDM}$; bod M je střed hrany CG .

Úlohu řešte početně i konstrukčně.

3.39 (zajímavost pro maturanty)

VZDÁLENOST BODU OD PŘÍMKY A OD ROVINY

Vzdálenost bodu od přímky (strana 84)

– musíme najít rovinu, ve které leží přímka i bod a spustíme kolmici od toho bodu k přímce

Vzorový příklad:

Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky $a = 5 \text{ cm}$. Vypočtěte vzdálenost bodu F od přímky AB .

Úlohy: (učebnice strana 89)

3.46 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a . Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky

- a) DH , b) FG , c) FH , d) BH .

Příklad 2: Je dán pravidelný čtyřboký hranol $ABCD A' B' C' D'$;

$|AB| = a = 4 \text{ cm}$, $|AA'| = v = 5,5 \text{ cm}$. Bod M je střed hrany $A'D'$.

Vypočtěte vzdálenost bodu B od přímky

- a) AD , b) AC , c) $C'D'$, d) $A'C'$, e) AC' , f) CM .

3.47 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky $a = 4 \text{ cm}$; bod M je středem hrany AB . Určete vzdálenost bodu G od přímky HM .

Úlohu řešte početně i konstrukčně.

Příklady:

Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky $a = 4 \text{ cm}$. Určete vzdálenost bodu od přímky:

- a) F od AC
b) F od AD
c) F od AH
d) E od BH
e) A od FH
f) G od $S_{AB} S_{BC}$

DÚ: a) B od AD

b) A od BD

c) C od EF

Vzdálenost bodu od roviny (strany 88 – 89)

Příklady:

Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky $a = 4 \text{ cm}$. Určete vzdálenost bodu od roviny:

- a) F od BEH
b) F od BEG
c) F od BCS_{AE}
d) E od $S_{EH} S_{EF} S_{AB}$
e) S_{EF} od ABG
f) S_{EF} od ABS_{CG}

Úlohy: (učebnice strana 90)

3.54 (opakování)

3.55 (opakování)

VZDÁLENOST PŘÍMEK A ROVIN (přečíst strany 91 – 92 a 95)

- a) **vzdálenost dvou rovnoběžných přímek** = vzdálenost libovolného bodu jedné přímky od druhé přímky.
- b) **vzdálenost dvou rovnoběžných rovin** = vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé roviny.
- c) **vzdálenost přímky rovnoběžné s rovinou** = vzdálenost libovolného bodu přímky od roviny.

Příklad 1: Krychle $ABCDEFGH$ má hranu délky $a = 5 \text{ cm}$, body K a L jsou po řadě středy hran AB a BC . Určete konstrukčně i početně

- a) vzdálenost přímek EG a KL ,
- b) vzdálenost rovin ACH a BEG .

Úlohy: (učebnice strana 98)

3.65 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a . Body K, L, M, N, P, Q jsou po řadě středy hran AB, BC, EH, GH, EF, FG . Určete vzdálenost přímek

- a) BF a CG ,
- b) AH a BG ,
- c) KL a PQ ,
- d) PQ a MN ,
- e) MN a KL .

3.68 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a . Body K, L, M, X, Y, Z jsou po řadě středy hran AB, EF, EH, BC, CD, FG . Bod R je bodem hrany AD , $|AR| = \frac{1}{5}a$, bod S je bodem hrany BC , $|CS| = \frac{1}{4}a$. Určete vzdálenost rovin

- a) ABC a EFG ,
- b) ABM a GHX ,
- c) KLM a XYZ .

Příklad 3: Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a , bod M je bodem hrany EH . Určete vzdálenost mimoběžek

- a) AB a FG ,
- b) AC a FM .

3.69 Krychle $ABCDEFGH$ má hranu délky $a = 5 \text{ cm}$, body P, Q, R, U, V, W jsou po řadě středy hran AE, EF, EH, BC, CG, CD . Určete vzdálenost rovin

- a) PQR a UVW .

Příklady:

Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky $a = 4 \text{ cm}$. Určete vzdálenost přímek:

- a) AB a FG
- b) AC a FM ($M = S_{EH}$)
- c) AB a FH
- d) BO a EG ($O = S_{AD}$)
- e) BC a PG ($P = S_{CD}$)
- f) AC a BH

$$v = 4 \text{ cm}$$

$$v = 4 \text{ cm}$$

$$v = 4 \text{ cm}$$

$$v = 4 \text{ cm}$$

$$v = 1,79 \text{ cm}$$

$$v = 1,63 \text{ cm}$$

OPAKOVÁNÍ:

Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky $a = 4\text{ cm}$.

1) Odchylka přímek, odchylka dvou rovin a odchylka přímky a roviny

- | | |
|---|--------|
| a) Vypočítejte odchylku přímek CG a BH . | 54°44' |
| b) Vypočítejte odchylku přímek AG a DF . | 70°32' |
| c) Vypočítejte odchylku dvou rovin BEG a AGH . | 35°16' |
| d) Vypočítejte odchylku dvou rovin BDE a BDG . | 70°32' |
| e) Vypočítejte odchylku přímky BS_{EG} a roviny CDH . | 24°06' |
| f) Vypočítejte odchylku přímky DF a roviny BCG . | 35°16' |
| g) Vypočítejte odchylku přímek AH a BS_{AH} . | 54°44' |
| h) Vypočítejte odchylku dvou rovin ACG a BDH . | 90° |
| i) Vypočítejte odchylku přímky BH a roviny ABC . | 35°16' |
| j) Vypočítejte odchylku dvou rovin ABC a BDG . | 54°44' |
| k) Vypočítejte odchylku přímky HS_{AB} a roviny EFG . | 41°49' |

2) Kolmost přímek, kolmost přímky a roviny, kolmost rovin, pata kolmice a pravoúhlé promítání

- | | |
|--|-----|
| a) Dokažte, že přímky AC a DF jsou kolmé. | ano |
| b) Dokažte, že přímka EG a rovina BDH jsou kolmé. | ano |
| c) Dokažte, že roviny BDF a ACS_{DH} jsou kolmé. | ano |
| d) Určete patu kolmice vedené bodem B k přímce EG . | |
| e) Určete patu kolmice vedené bodem D k přímce ES_{FG} . | |
| f) Určete pravoúhlý průmět bodu C do roviny BFH . | |
| g) Určete pravoúhlý průmět bodu E do roviny BCG . | |
| h) Určete pravoúhlý průmět přímky BE do roviny CDH . | |
| i) Určete pravoúhlý průmět přímky AG do roviny BDF . | |

3) Vzdálenost bodu od přímky a vzdálenost bodu od roviny

- | |
|--|
| a) Určete vzdálenost bodu B od přímky EG . |
| b) Určete vzdálenost bodu F od přímky AB . |
| c) Určete vzdálenost bodu D od přímky AC . |
| d) Určete vzdálenost bodu H od roviny AEF . |
| e) Určete vzdálenost bodu F od roviny BCH . |
| f) Určete vzdálenost bodu A od roviny $S_{BC}S_{FG}S_{CD}$. |
| g) Určete vzdálenost bodu B od roviny ACF . |
| h) Určete vzdálenost bodu S_{FG} od roviny BCE . |

4) Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek, vzdálenost dvou rovnoběžných rovin a vzdálenost mimoběžek

- | |
|---|
| a) Určete vzdálenost přímek AE a CG . |
| b) Určete vzdálenost rovin AFH a BDG . |
| c) Určete vzdálenost přímek AE a FG . |
| d) Určete vzdálenost přímek EH a $S_{AB}S_{CD}$. |
| e) Určete vzdálenost rovin ABS_{CG} a $HS_{AE}S_{BF}$. |
| f) Určete vzdálenost přímek BD a CG . |
| g) Určete vzdálenost přímek BD a $S_{FG}S_{GH}$. |
| h) Určete vzdálenost přímek FH a $S_{EF}S_{EH}$. |
| i) Určete vzdálenost přímek AD a $S_{AC}S_{EG}$. |