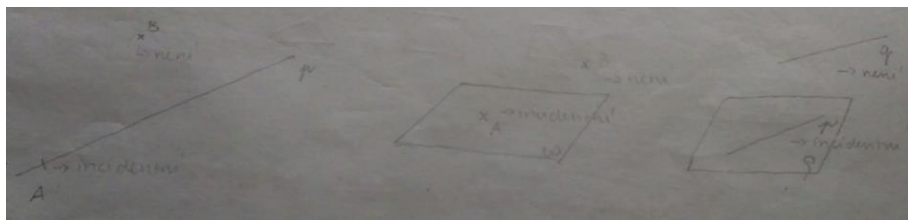


STEREOMETRIE – POLOHOVÉ VLASTNOSTI

ZÁKLADNÍ POJMY – BOD, PŘÍMKA, ROVINA

Incidentní – bod leží v přímce (přečíst stranu 18)



*načrtnout obrázky 14a, 14b a 14c do sešitu

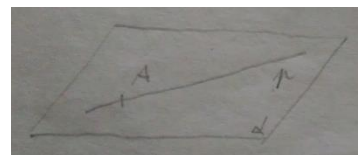
Bod leží v rovině, jestliže leží na její přímce.

Přímka leží v rovině, jestliže leží v rovině její 2 různé body.

Každá přímka je dána 2 body.

Rovina je jednoznačně určena:

- 1) 3 body, které neleží v přímce
- 2) přímkou a bodem, který na ni neleží
- 3) 2 různými rovnoběžkami
- 4) 2 různoběžkami



Příklad 1: Je dána krychle $ABCDEFGH$ (obr. 17).

- a) Určete různým způsobem rovinu dolní stěny krychle.
- b) Rozhodněte, zda v této rovině leží přímky BD , BH .

Úlohy: (učebnice strana 21)

2.1 Je dána krychle $ABCDEFGH$.

- | | |
|---|----|
| a) Kolik různých přímek je určeno vrcholy A, C, E, F, H ? | 10 |
| b) Kolik různých přímek je určeno všemi vrcholy krychle? | 28 |
| c) Kolik z nich prochází bodem B . | 7 |

2.2 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zjistěte, zda v rovině BCE leží

- | | |
|----------------------|--|
| a) body H, F , | $H \in \overline{BCE}$ (ano); $F \notin \overline{BCE}$ (ne) |
| b) přímky CH, AC . | $\overline{CH} \in \overline{BCE}$ (ano); $\overline{AC} \notin \overline{BCE}$ (ne) |

Výsledek zapište symbolicky.

2.3 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Body P, R, S, T, U, V jsou po řadě středy hran AB, AE, BC, CG, EH, GH . Zjistěte, zda leží v jedné rovině body

- | | |
|-------------------------|-----|
| a) A, C, U, V , | ano |
| b) C, R, U, V , | ne |
| c) C, E, P, V , | ano |
| d) R, S, T, U , | ano |
| e) P, R, S, T, U, V . | ano |

VZÁJEMNÁ POLOHA DVOU PŘÍMEK, PŘÍMKY A ROVINY, DVOU A TŘÍ ROVIN

Vzájemná poloha dvou přímek (přečíst text ze strany 22)

- různoběžky (s jedním společným bodem = průsečík)
- rovnoběžky (žádný společný bod)
- splývající přímky (totožné, nekonečně mnoho společných bodů)
- mimoběžky (neleží ve stejné rovině a nemají žádný společný bod)

Úlohy: (učebnice strana 24)

2.7 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Uvedte všechny přímky, které procházejí bodem E a dalším vrcholem krychle a jsou s přímkou BC

- a) rovnoběžné, b) různoběžné, c) mimoběžné.
d) Najděte tři přímky určené vrcholy krychle, z nichž každé dvě jsou mimoběžné.

2.9 Je dána krychle $ABCDEFGH$; body X, Y, Z jsou po řadě středy hran FB, FE, FG . Určete vzájemnou polohu přímek

- a) XY, EZ , b) YZ, EH , c) XZ, AH .

Vzájemná poloha přímky a roviny (přečíst strany 25 až 26)

- přímka splývá s rovinou (nekonečně mnoho společných bodů)
- přímka je rovnoběžná s rovinou (nemají společný bod)
- přímka je různoběžná s rovinou (s jedním společným bodem)

Úlohy: (učebnice strana 26)

2.12 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete všechny přímky, které procházejí bodem H a některým dalším vrcholem krychle a s rovinou ABC jsou

- a) rovnoběžné, b) různoběžné.

2.13 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete všechny roviny, které procházejí bodem H a dalšími dvěma vrcholy krychle a jsou s přímkou BC

- a) rovnoběžné, b) různoběžné.

2.14 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Najděte přímku, která prochází bodem B a dalším vrcholem krychle, je rovnoběžná s rovinou EFG a různoběžná s přímkou AD .

Vzájemná poloha dvou rovin

- splývající (totožné, nekonečně mnoho společných bodů)
- různoběžné – nekonečně dlouhá přímka (průsečnice)
- rovnoběžné (žádný společný bod)

Další pojmy:

- vrstva (prostor mezi dvěma rovnoběžnými rovinami)
 - roviny jsou hraniční roviny
 - vzdálenost rovin je tloušťka vrstvy
- klín (prostor mezi dvěma různoběžnými rovinami a jejich průsečnicí)
 - průsečnice je hrana klínu
 - poloroviny jsou stěny klínu

Příklad 1: Je dána krychle $ABCDEFGH$. Rozhodněte o vzájemné poloze rovin

- a) ABC, EFH , b) ABC, BCD , c) ADH, BCE .

Příklad 2: Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete průsečnici rovin ACE a BDF .

Úlohy: (učebnice strana 29)

2.21 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete všechny roviny, které procházejí bodem H a dalšími dvěma vrcholy krychle a jsou s rovinou ABC

- a) rovnoběžné, b) různoběžné.

Vzájemná poloha tří rovin (učebnice strana 36 – obrázky)

- splývající
- rovnoběžné
- dvě rovnoběžné a jedna různoběžná
- všechny různoběžné a mají jednu společnou přímku
- všechny různoběžné a mají 3 průsečnice
- všechny různoběžné a mají jeden společný bod

Úlohy: (učebnice strana 37)

2.33 Body A, B, C, D jsou vrcholy čtyřstěnu. Body K, L, M jsou po řadě středy hran AD, BD, CD . Zjistěte vzájemnou polohu tří rovin.

a) $\overleftrightarrow{ABD}, \overleftrightarrow{KLM}, \overleftrightarrow{BCD}$

různoběžné a mají jeden společný bod

b) $\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{BKM}, \overleftrightarrow{ACD}$

různoběžné a mají 3 průsečnice

c) $\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{ABD}, \overleftrightarrow{ABM}$

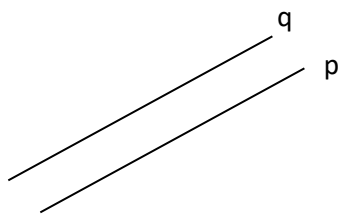
různoběžné s jednou společnou přímkou

d) $\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{KLM}, \overleftrightarrow{BCD}$

dvě rovnoběžné a jedna různoběžná

ROVNOBĚŽNOST PŘÍMEK A ROVIN (přečíst text ze strany 29 – 33)

- Přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ , obsahuje-li rovina ρ aspoň jednu přímku p' , pro kterou platí že $p' \parallel p$.



$p \parallel q$ a $q \parallel r$, pak $p \parallel r$

Příklad 1: Bod M je střed hrany AB krychle $ABCDEFGH$. Ved'te bodem M přímku p rovnoběžnou s rovinami BEG a BDH .

- Dvě roviny jsou rovnoběžné, jestliže jedna z nich obsahuje dvě různoběžky rovnoběžné s druhou rovinou.

Úlohy: (učebnice strana 34)

2.25 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, bod M je střed hrany BV . Dokažte, že přímka VD je rovnoběžná s rovinou ACM .

2.26 Je dána krychle $ABCDEFGH$, body K, L, M, N jsou po řadě středy hran EF, BF, FG, DH . Dokažte rovnoběžnost rovin

- a) KLM, BEG ,
- b) KLM, ACH ,
- c) ACN, ELG .

ROVINNÉ ŘEZY HRANOLU A JEHLANU

Sestrojení průsečíku přímky a roviny (obrázek 38)

- 1) přímku p proložíme vhodnou rovinu různoběžnou se zadanou rovinou
- 2) průsečnici rovin (dva body) $= r$
- 3) $P \in p \cap r$

Příklad 2: Je dána rychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průsečíky přímky CE a roviny BDG . (obrázek 39)

Řez tělesa rovinou (přečíst důležité rámečky ze strany 39)

- Leží-li dva různé body v rovině, pak přímka jimi určená leží také v této rovině.
- Dvě rovnoběžné roviny protíná třetí rovina ve dvou rovnoběžných přímkách.
- Jsou-li každé dvě ze tří rovin různoběžné a mají-li tyto tři roviny jediný společný bod, procházejí tímto společným bodem všechny tři průsečnice.

Příklad 2: Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou ρ určenou body

- a) A, B, U ; U je střed hrany CG ,
- b) B, G, V ; V je střed hrany AE ,
- c) X, Y, Z ; X je bodem hrany AE , $|AX|:|XE| = 4:1$,
 Y je bodem hrany BF , $|BY|:|YF| = 1:2$,
 Z je bodem hrany CG , $|CZ|:|ZG| = 2:1$,
- d) V, W, Z ; W je střed hrany AB .

Příklad 3: Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu (zajímavost pro maturanty)

Příklad 4: Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou XYZ , je-li bod X středem hrany AD , bod Y středem hrany BF a bod Z je bodem hrany HG , přitom $|HZ|:|ZG| = 1:3$.

Úlohy: (učebnice strana 50)

2.35 Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou

- a) MCH ; bod M leží na prodloužení úsečky AD za bod A , $|MA|:|AD| = 1:2$,
- b) BPQ ; bod P je střed hrany FG , bod Q leží na prodloužení úsečky EF za bod E , $|QE|:|EF| = 1:3$,
- c) TRS ; bod T je středem hrany FG , bod R je bodem polopřímky AB ,
 $|AR| = \frac{5}{4} |AB|$, bod S je bodem polopřímky AE , $|AS| = \frac{3}{2} |AE|$.

2.41 (zajímavost pro maturanty)

Další příklady:

2.36

2.40

2.42

Průsečnice rovin

Úlohy: (učebnice strana 51)

2.44 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průsečnici rovin

- a) ACG, AFH ,
- b) ACF, BEG ,
- c) BCG, AEO ; bod O je středem stěny $BCGF$,
- d) ABM, CDM ; bod M je středem hrany FG ,
- e) ACE, BHP ; bod P je středem hrany FG ,
- f) RST, XYZ ; body S, Z, T jsou po řadě středy úseček AB, CG, CZ a body X, Y, R leží po řadě na hranách AB, AE, EF , $|AX|:|XB| = |AY|:|YE| = |FR|:|RE| = 2:1$.

2.45 (zajímavost pro maturanty)

2.46 (zajímavost pro maturanty)

Průsečík přímky a roviny

Úlohy: (učebnice strana 52)

2.50 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte

- a) průsečík přímek AE, EG a EC s rovinou BDH ,
- b) průsečík přímek FC, FD a CQ s rovinou BHP ; body P, Q jsou po řadě středy hran AE a EH .

2.51 (zajímavost pro maturanty)

2.67 Je dán kvádr $ABCDEFGH$. Bod M leží na hraně EF , $|EM|:|MF| = 3:5$, bod N je bodem polopřímky FG a přitom je bod G středem úsečky FN , bod P leží na polopřímce DC , $|DP| = \frac{5}{4} |DC|$. Sestrojte

- a) řez kváдру rovinou MNP ,
- b) průsečnici p roviny MNP s rovinou stěny $ADHE$.

2.68 Zobrazte pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$.

- a) Sestrojte jeho řez $ABMN$ rovinou ABM , kde M je střed hrany CV .
- b) Určete průsečnici p rovin BCV a ADV .
- c) Dokažte, že se přímky p, BM a AN protínají v jednom bodě P .

2.52 (zajímavost pro maturanty)

Další příklady:

2.66

PRŮNIK PŘÍMKY S TĚLESEM

Průnik přímky tělesem (přečíst text ze stran 46)

Přímku proložíme libovolnou rovinu, určíme řez tělesa touto rovinou a průnik přímky s řezem tělesa je zároveň průnik přímky s tělesem.

Je-li těleso hranol, je vhodné proložit přímku rovinu rovnoběžnou s bočními hranami hranolu, tzv. **směrovou rovinou**. Je-li těleso jehlan, proložíme přímku rovinu, která obsahuje hlavní vrchol jehlanu, tzv. **vrcholovou rovinu**.

Příklad 6: Je dán kvádr $ABCDEFGH$ se čtvercovou podstavou a přímka $p = \overrightarrow{PQ}$. Bod P je bodem polopřímky DC , $|DP| = \frac{4}{3} |CD|$, bod Q je bodem polopřímky FE , $|FQ| = \frac{3}{2} |EF|$. Sestrojte průsečíky přímky p s povrchem kvádru.

Další příklady:

1) Je dána krychle $ABCDEFGH$ a přímka $p = \overrightarrow{PQ}$.

- a) $P \in \overrightarrow{DH}$; $|DP| = 1,5 |DH|$
 $B = S_{QD}$
- b) $P \in \overrightarrow{CB}$; $|CP| = 1,5 |BC|$
 $Q \in \overrightarrow{EH}$; $|EQ| = 1,5 |EH|$
- c) $P \in \overrightarrow{FB}$; $|FP| = 1,25 |BF|$
 $Q \in \overrightarrow{DH}$; $|DQ| = 1,25 |DH|$

Úlohy: (učebnice strana 53)

2.53 (zajímavost pro maturanty)

2.54 (zajímavost pro maturanty)

Příčka mimoběžek (přečíst text ze stran 48 - 49)

Příčka mimoběžek je přímka, která mimoběžky protíná. Někdy příčkou dvou mimoběžek rozumíme úsečku s krajními body na mimoběžkách. Dvě mimoběžné přímky mají nekonečně mnoho příček. Aby úloha sestavit příčku mimoběžek měla konečný počet řešení, je potřeba připojit další podmínku.

Příklad 8: Je dána krychle $ABCDEFGH$.

Najděte příčku mimoběžek AH a BF , které prochází dvěma vrcholy krychle.

Úlohy: (učebnice strana 53 a 56)

2.57 Je dána krychle $ABCDEFGH$.

Sestrojte příčku mimoběžek EF a AC tak, aby

- a) procházela dvěma vrcholy krychle,
- b) ležela v rovině BDF .

2.77 Je dána krychle $ABCDEFGH$.

Sestrojte příčku mimoběžných přímek AH a CF , která

- a) leží v rovině BDH ,
- b) prochází dvěma vrcholy krychle,
- c) prochází středem hrany AB ,
- d) je rovnoběžná s některou hranou krychle,
- e) je rovnoběžná s přímkou EG .

OPAKOVÁNÍ:

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte:

1) Řez tělesa rovinou

- Sestrojte řez krychle rovinou KLM ;
bod K je středem hrany AB , bod L je středem hrany BC a bod M je bodem hrany GH , $|GM|:|MH| = 2:1$.
- Sestrojte řez krychle rovinou PQR ;
bod P je bodem hrany AD , $|AP|:|PD| = 3:1$, bod Q je středem hrany EF a bod R je bodem hrany CG , $|CR|:|RG| = 1:2$.

2) Průsečnice rovin

- Sestrojte průsečnici rovin ACF a BEG .
- Sestrojte průsečnici rovin BCH a ADF .
- Sestrojte průsečnici rovin CDE a ABH .
- Sestrojte průsečnici rovin DFG a BEG .

3) Průsečík přímky a roviny

- Sestrojte průsečíky přímek AC , EF a GH s rovinou ACH .
- Sestrojte průsečíky přímek BC , FG a CH s rovinou BDF .
- Sestrojte průsečíky přímek CD , AE a BG s rovinou CEG .
- Sestrojte průsečíky přímek AF , BH a DF s rovinou BCE .

4) Průnik přímky tělesem

- Sestrojte průnik přímky $p = \overleftrightarrow{PQ}$ s krychlí.
 $P \in \overrightarrow{AD}$; $|AP| = \frac{3}{2} |AD|$; $Q \in \overrightarrow{EF}$; $|EQ| = \frac{4}{3} |EF|$
- Sestrojte průnik přímky $p = \overleftrightarrow{PQ}$ s krychlí.
 $P \in \overrightarrow{BA}$; $|BP| = 2 |AB|$; $Q \in \overrightarrow{HG}$; $|HQ| = \frac{5}{4} |HG|$
- Sestrojte průnik přímky $p = \overleftrightarrow{PQ}$ s krychlí.
 $P \in \overrightarrow{CB}$; $|CP| = \frac{3}{2} |BC|$; $Q \in \overrightarrow{GH}$; $|GQ| = \frac{5}{4} |HG|$
- Sestrojte průnik přímky $p = \overleftrightarrow{PQ}$ s povrchem krychle.
 $P \in \overrightarrow{AE}$; $|AP| = \frac{3}{2} |AE|$; $Q \in \overrightarrow{GC}$; $|GQ| = 2 |CG|$
- Sestrojte průnik přímky $p = \overleftrightarrow{PQ}$ s povrchem krychle.
 $P \in \overrightarrow{CA}$; $|CP| = \frac{5}{3} |AC|$; $Q \in \overrightarrow{EG}$; $|EQ| = \frac{3}{2} |EG|$
- Sestrojte průnik přímky $p = \overleftrightarrow{PQ}$ s povrchem krychle.
 $P \in \overrightarrow{DB}$; $|DP| = \frac{4}{3} |BD|$; $Q \in \overrightarrow{GH}$; $|DH| = \frac{5}{2} |HG|$

5) Příčka mimoběžek

- Sestrojte příčku mimoběžek CD a BE , která
 - leží v rovině ADH ,
 - prochází dvěma vrcholy krychle,
 - prochází středem hrany BC .
- Sestrojte příčku mimoběžek CH a AF , která
 - leží v rovině EFG ,
 - prochází dvěma vrcholy krychle,
 - je rovnoběžná s některou hranou krychle
 - je rovnoběžná s přímkou BD .
- Sestrojte příčku mimoběžek BH a CG , která
 - leží v rovině ABC ,
 - prochází dvěma vrcholy krychle,
 - je rovnoběžná s přímkou EH .