

## ÚVOD DO KONSTRUKČNÍCH ÚLOH

[http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/stepan\\_kurka\\_dp/osy.php](http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/stepan_kurka_dp/osy.php)

Konstrukční úloha je příklad, jehož řešením je geometrický útvar se zadanými vlastnostmi sestrojený pomocí pravítka, kružítka a případně i úhломěru. Při řešení těchto úloh se využívá jak **množin bodů dané vlastnosti** a množinových operací, tak geometrických vět. Obecně dělíme konstrukční úlohy na **polohové**, kde je alespoň jeden z prvků útvaru zadán svou polohou, a **nepolohové**, u kterých lze daný útvar sestrojit kdekoliv. Nepolohové úlohy se převádějí na polohové vhodným umístěním určujících prvků.

*Příkladem nepolohové úlohy je sestrojit trojúhelník ABC o daných délkách stran  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Ekvivalentní polohová úloha je například najít třetí vrchol trojúhelníku, je-li dána strana AB. Zmíněnou nepolohovou úlohu na polohovou změníme, když v rovině pevně umístíme jednu ze stran trojúhelníku.*

Správnými kroky řešení konstrukční úlohy jsou **rozběr**, **popis konstrukce**, **konstrukce** samotná a **závěr**, jehož součástí je u úloh s parametry **diskuze**. Rozborem se myslí nástin řešení, popis konstrukce je potom konkrétní zápis kroků, podle kterých se bude konstrukce provádět. Závěr a diskuze, popřípadě zkouška, nakonec ověří správnost konstrukce a v závislosti na zadání prověří počet řešení, přičemž uvažujeme všechna řešení v rovině.

*Některé kroky při řešení konstrukčních úloh považujeme za základní a není nutné je tedy rozepisovat, např. vztyčení kolmice procházející daným bodem k dané přímce, sestrojení rovnoběžky procházející daným bodem k dané přímce nebo osy daného úhlu.*

V každé geometrické konstrukční úloze jde o sestrojení geometrického útvaru daných vlastností. Nejčastěji se jedná o sestrojení aspoň jednoho útvaru nebo všech útvarů s požadovanými vlastnostmi.

Nejužívanější metodou řešení planimetrických konstrukčních úloh je **metoda množin všech bodů dané vlastnosti**. Kromě této metody se užívá **metoda algebraická** (konstrukci řešíme na základě výpočtu) a **metoda geometrických zobrazení**. Tyto metody se často různým způsobem kombinují.

## MNOŽINY BODŮ DANÉ VLASTNOSTI

Jedním z postupů při řešení konstrukčních úloh je využití **množin bodů dané vlastnosti**. Jedná se o množiny bodů v rovině, v nichž jsou všechny body, které mají danou vlastnost, a žádné jiné. Symbolicky zapisujeme  $M = \{X \in \rho; \varphi(X)\}$ , kde  $\varphi$  je výrok týkající se bodu  $X$  ve vztahu k jiným objektům roviny  $\rho$ .

Množina  $M$  všech bodů roviny  $\rho$  s danou vlastností, je množina, pro kterou platí:

- Každý bod s danou vlastností patří do množiny  $M$ .
- Každý bod množiny  $M$  má danou vlastnost.

Podmínky je možné za pomoci obměny nahradit ekvivalentními výroky:

- Každý bod, který má danou vlastnost, patří do množiny  $M$ .
- Každý bod, který nemá danou vlastnost, nepatří do množiny  $M$ .

Při vyšetřování konkrétní množiny bodů dané vlastnosti v rovině je nutné potvrdit obě tyto podmínky.

### Příklady:

*Příkladem množiny bodů dané vlastnosti může být kružnice zadaná středem  $S$  a kladným reálným číslem (poloměrem)  $r$ , což je množina všech bodů, které mají od středu stejnou danou vzdálenost. Symbolicky v rovině  $\rho$  lze zapsat  $M = \{X \in \rho; |XS| = r\}$ .*

*Každý bod  $X$ , který je od středu vzdálen  $r$ , leží na této kružnici. Oproti tomu, každý bod kružnice je od středu vzdálen  $r$ . Je tedy potvrzeno, jak tato množina vypadá. Druhým tvarem podmínek se kružnice vyjádří takto: Každý bod, jehož vzdálenost od středu je rovna  $r$ , náleží kružnici. Naopak každý bod, jehož vzdálenost od středu je různá od  $r$ , na kružnici neleží.*

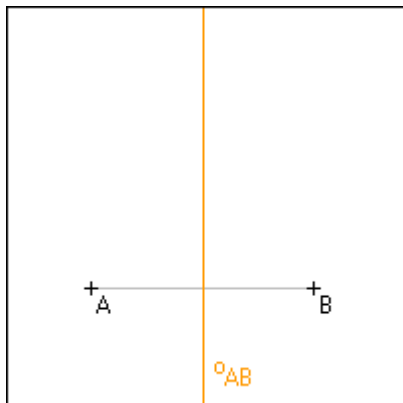
## OSA ÚSEČKY

**Osa úsečky**  $AB$  je množina bodů  $X$  v rovině, které mají od bodu  $A$  a od bodu  $B$  stejnou vzdálenost. Při rýsování se vychází z faktu, že střed úsečky  $AB$  do této množiny patří. Další body  $X$  této množiny jsou vrcholy rovnoramenných trojúhelníků  $ABX$ , které jsou osově souměrné podle osy základny, proto je množina kolmicí na úsečce  $AB$ .

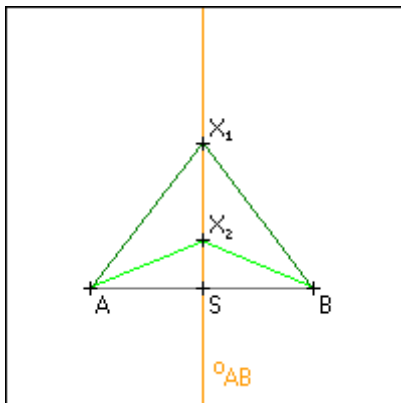
Současně můžeme k ose úsečky přistupovat jako k množině všech středů  $X$  kružnic v rovině, které body  $A$  a  $B$  procházejí. Protože je potom  $|AX|$  rovno  $|BX|$ , je tato vzdálenost současně poloměrem příslušné kružnice se středem  $X$ .

**Osa úsečky**  $AB$  je množina  $M$  bodů  $X$  roviny  $p$  takových, že

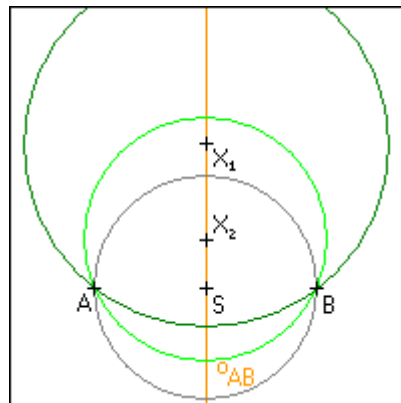
- vzdálenosti  $|AX|$  a  $|BX|$  se rovnají,  
 $M = \{X \in p; |AX| = |BX|\};$
- $X$  je středem kružnice, na níž leží body  $A$  a  $B$ .



Osa úsečky  $AB$ .



Body  $S, X_1, X_2$  se stejnou vzdáleností od bodů  $A, B$ .



Středů  $S, X_1, X_2$  kružnic, na nichž leží  $A$  i  $B$ .

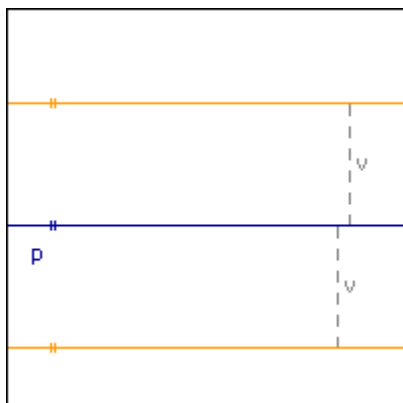
## EKVIDISTANTA PŘÍMKY

Množina všech bodů v rovině, které mají od dané přímky  $p$  stejnou vzdálenost, se nazývá **ekvidistanta přímky**  $p$ . Jedná se o sjednocení dvou přímek, jež jsou s přímkou  $p$  rovnoběžné. Pro narysování stačí pro každou z dvou přímek narysovat jeden konkrétní bod, který na ní leží, a jím vést rovnoběžku. Vzdálenost bodu od přímky jsme si definovali už u kružnice vepsané.

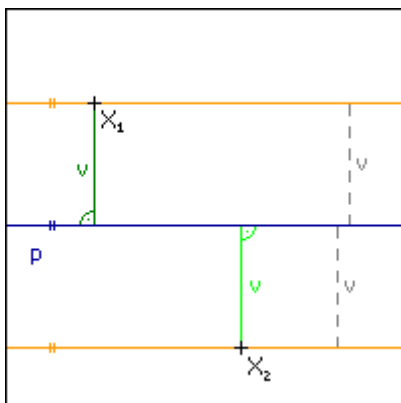
Jinou možností, jak ekvidistantu o vzdálenosti  $v$  definovat, je množina středů všech kružnic o poloměru  $v$ , které se přímkou  $p$  dotýkají (přímka  $p$  je jejich tečnou).

**Ekvidistanta přímky**  $p$  je pro konkrétní kladné číslo  $v, v > 0$ , množina  $M$  všech bodů  $X$  v rovině  $p$  takových, že

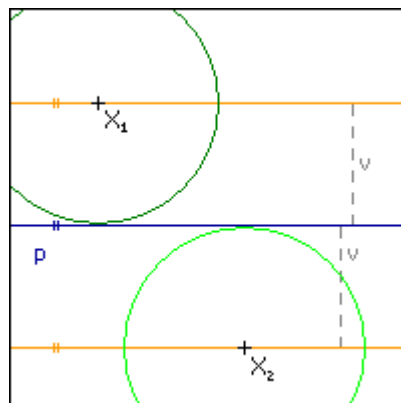
- vzdálenost bodu  $X$  od přímky  $p$  je rovna  $v$ ,  
 $M = \{X \in p; d(X, p) = v\},$
- $X$  je středem kružnice o poloměru  $v$ , pro niž je přímka  $p$  tečnou.



Ekvidistanta přímky  $p$ .



Body  $X_1, X_2$  se vzdáleností  $v$  od přímky  $p$ .



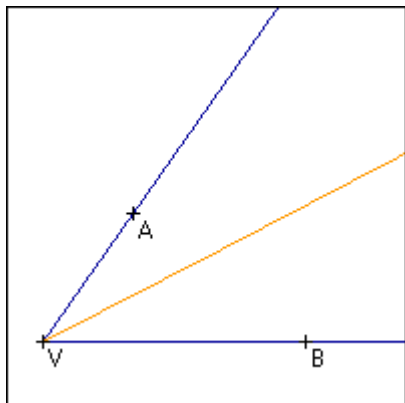
Středů  $X_1, X_2$  kružnic o poloměru  $v$ , pro něž je  $p$  tečnou.

## OSA ÚHLU

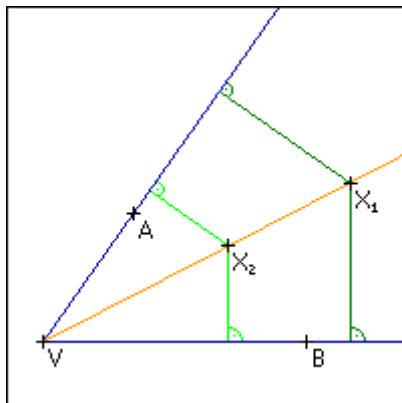
**Osu úhlu** zavedeme jako polopřímku, která úhel rozděljuje na dva úhly stejné velikosti. Zde jen připomeneme, že pro definice pomocí vzdáleností je nutné, aby byl daný úhel konvexní. To nebylo důležité u trojúhelníků, neboť vnitřní úhly trojúhelníku jsou konvexní vždy.

**Osa konvexního úhlu  $AVB$**  je množina  $M$  všech bodů  $X$  v rovině  $p$  takových, že

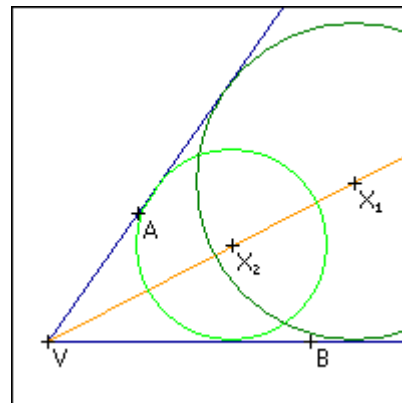
- $X$  je od polopřímek  $\rightarrow VA$  a  $\rightarrow VB$  stejně vzdálen,
- $M = \{X \in \angle AVB; d(X, \rightarrow VA) = d(X, \rightarrow VB)\},$
- $X$  je buď bodem  $V$ , nebo středem kružnice, pro niž jsou polopřímky  $\rightarrow VA$  a  $\rightarrow VB$  tečnami.



Osa úhlu  $BVA$ .



Body  $X_1, X_2$  se stejnou vzdáleností od polopřímek  $\rightarrow VA$  a  $\rightarrow VB$ .

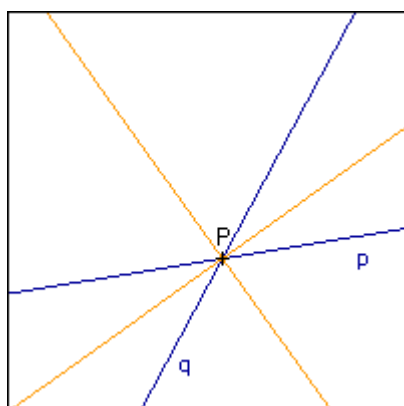


Středů  $X_1, X_2$  kružnic, pro něž jsou  $\rightarrow VA$  a  $\rightarrow VB$  tečnami.

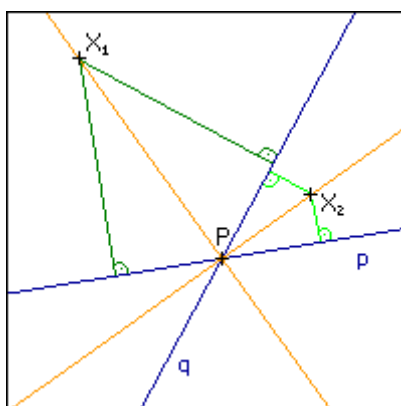
Množinu lze zobecnit na případ úhlu vymezeného dvěma různoběžnými přímkami  $p, q$  (tedy ne pouze polopřímkami), které se protínají v bodě  $P$ . Body, které budou od obou přímek vzdáleny stejně, budou tvořit množinu složenou ze dvou na sebe kolmých přímek. Z hlediska předchozího zavedení pojmu vymezují přímky  $p, q$  čtyři konvexní úhly, jejichž osy po sjednocení tvoří hledanou množinu.

**Osa úhlů vymezených různoběžnými přímkami  $p, q$  s průsečíkem  $P$**  je množina  $M$  bodů  $X$  v rovině  $p$  takových, že

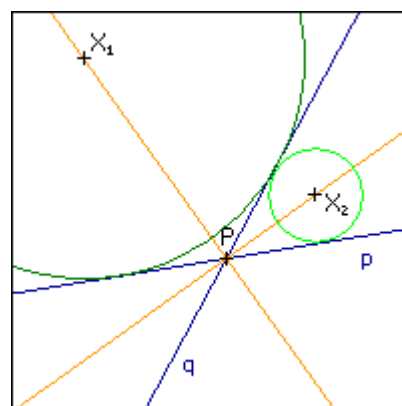
- $X$  je od přímek  $p$  a  $q$  stejně vzdálen,
- $M = \{X \in p; d(X, p) = d(X, q)\},$
- $X$  je buď bodem  $P$ , nebo je středem kružnice, pro niž jsou přímky  $p$  a  $q$  tečnami.



Osy úhlů vymezených přímkami  $p, q$ .



Body  $X_1, X_2$  se stejnou vzdáleností od přímek  $p$  a  $q$ .



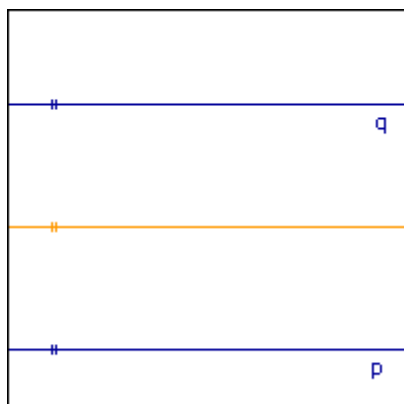
Středů  $X_1, X_2$  kružnic, pro něž jsou  $p$  a  $q$  tečny.

## OSA PÁSU

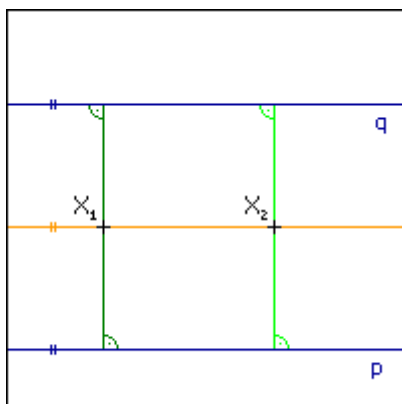
Pro rovnoběžné přímky existuje množina bodů, které jsou od nich stejně vzdáleny. Takovou množinou je přímka, takzvaná osa pásu, která je s oběma rovnoběžná a leží "mezi nimi".

**Osa pásu rovnoběžných přímek  $p, q$**  je množina  $M$  bodů  $X$  v rovině  $p$  takových, že

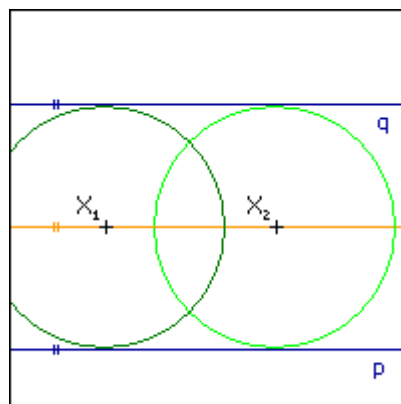
- $X$  je od přímek  $p$  a  $q$  stejně vzdálen,
- $M = \{X \in p; d(X, p) = d(X, q)\},$
- $X$  je středem kružnice, pro niž jsou přímky  $p$  a  $q$  tečnami.



Osa pásu rovnoběžek  $p, q$ .



Body  $X_1, X_2$  se stejnou vzdáleností od rovnoběžek  $p, q$ .



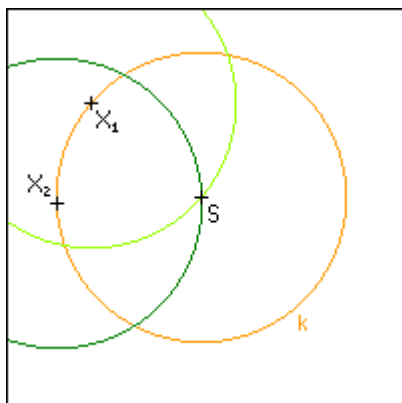
Středů  $X_1, X_2$  kružnic, pro něž jsou  $p$  a  $q$  tečny.

## KRUŽNICE

Kružnice je, jak už bylo řečeno, množina všech bodů v rovině, které mají od daného bodu  $S$  (středu) stejnou vzdálenost  $r$  (poloměr). Můžeme na ni ale nahlížet i jako na množinu všech středů kružnic téhož poloměru, které bodem  $S$  procházejí.

**Kružnice  $k(S, r)$ ,  $r > 0$** , je množina všech bodů  $X$  v rovině takových, že

- vzdálenost bodů  $X$  a  $S$  je rovna  $r$ ,
- $k = \{X \in p; |XS| = r\},$
- $X$  je středem kružnice o poloměru  $r$ , na níž leží bod  $S$ .

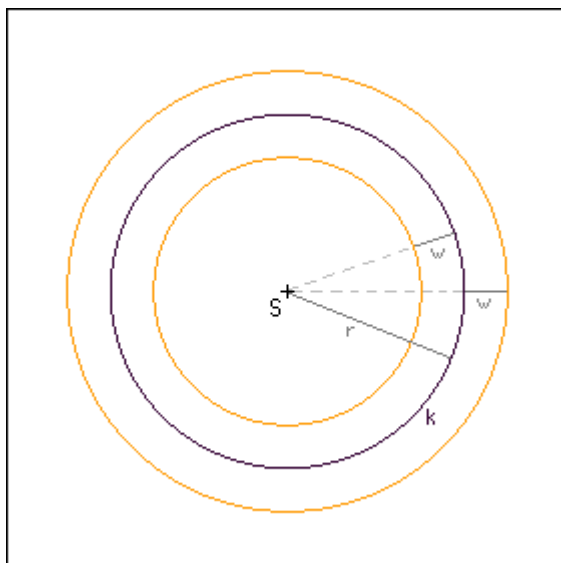


$X_1, X_2$  jako středy kružnic o poloměru  $r$ , které procházejí bodem  $S$ .

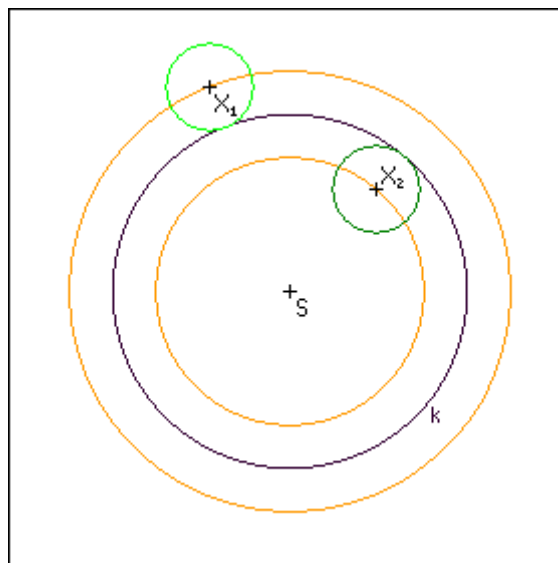
## EKVIDISTANTA KRUŽNICE

*Vzdálenost bodu od kružnice se v středoškolské geometrii nezavádí, proto ekvidistantu kružnice zavedeme jinak než u přímky. Pro kružnici  $k$  se středem  $S$  o poloměru  $r$ ,  $r > 0$ , je ekvidistanta o vzdálenosti  $w$ ,  $w > 0$ , množinou středů všech kružnic o poloměru  $w$ , které se kružnice  $k$  dotýkají (tj. mají s ní právě jeden společný bod).*

*Pro  $w \neq r$  se jedná o dvě soustředné kružnice se středem v bodě  $S$  s poloměry  $w + r$  a  $|w - r|$ , v případě, kdy  $w = r$  je ekvidistantou jedna kružnice se středem v bodě  $S$  a poloměrem  $2r$ .*



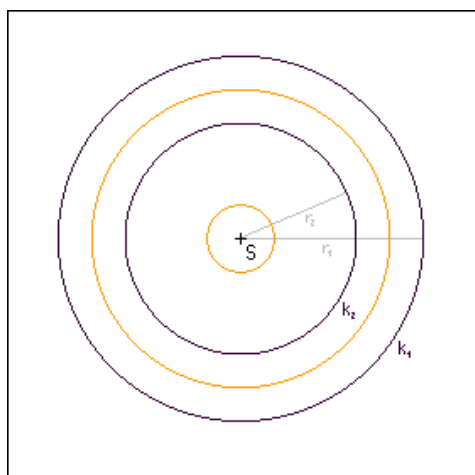
Ekvidistanta o vzdálenosti  $w$  kružnice o poloměru  $r$ .



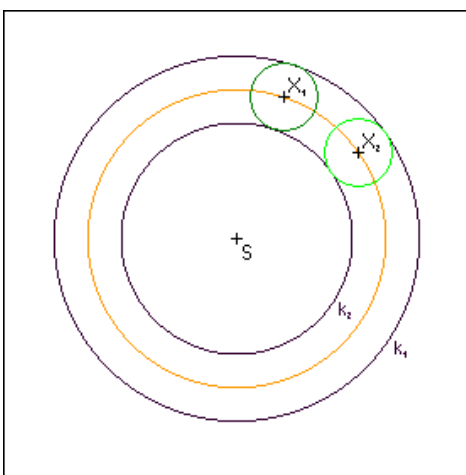
$X_1, X_2$  jako středy kružnic o poloměru  $w$ , které se dotýkají kružnice  $k$ .

## MNOŽINA STŘEDŮ KRUŽNIC DOTYKU

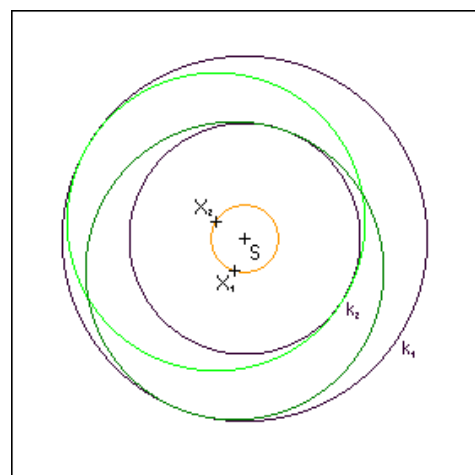
*Pro dvě soustředné kružnice  $k_1$  o poloměru  $r_1$  a  $k_2$  o poloměru  $r_2$ , kde  $r_1 > r_2$ , existuje množina středů kružnic, které se obou dotýkají. Tato množina vznikne sjednocením dvou soustředných kružnic se stejným středem jako kružnice původní. Ta s větším poloměrem má poloměr  $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$  a odpovídající dotykové kružnice mají poloměr  $\frac{1}{2}(r_1 - r_2)$ . Druhá má poloměr  $\frac{1}{2}(r_1 - r_2)$  a její dotykové kružnice mají poloměr  $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ .*



Množina středů kružnic dotyku.



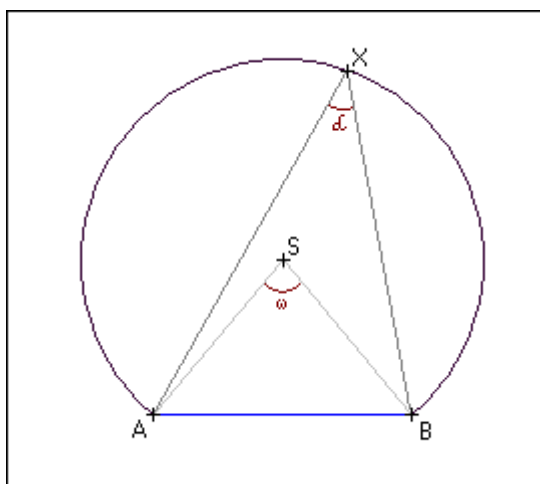
Kružnice o poloměru  $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ , na níž leží středy kružnic o poloměru  $\frac{1}{2}(r_1 - r_2)$ .



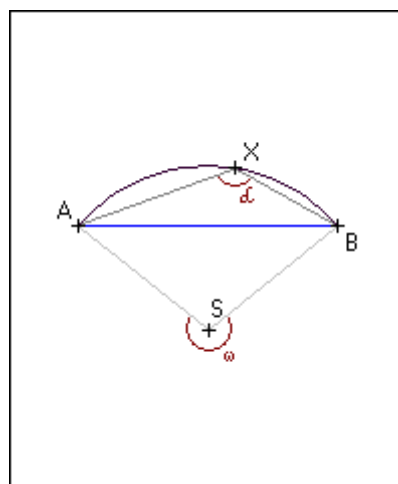
Kružnice o poloměru  $\frac{1}{2}(r_1 - r_2)$ , na níž leží středy kružnic o poloměru  $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ .

## OBLOUKY

Mějme otevřený kružnicový oblouk se středem  $S$ , poloměrem  $r$  a krajními body  $A, B$ . Úhel  $ASB$  se nazývá **středový úhel**, označme jej jako  $\omega$ . V tomto případě budeme dbát na pořadí zmíněných bodů, úhel  $\omega$  tedy může být i nekonvexní. Libovolně si na oblouku zvolíme bod  $X$ . Úhel  $AXB$ , takzvaný **obvodový úhel**, označme jako  $\alpha$ .

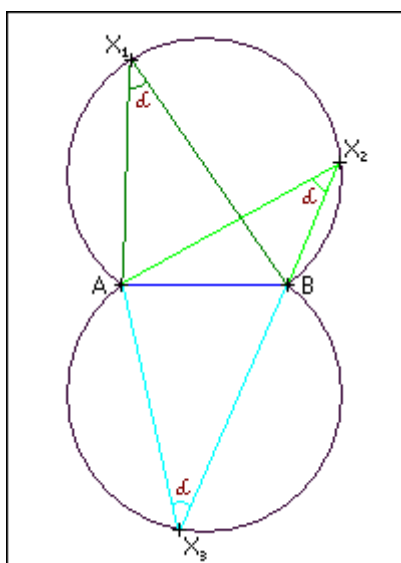


Středový a obvodový úhel,  
 $\omega$  konvexní.

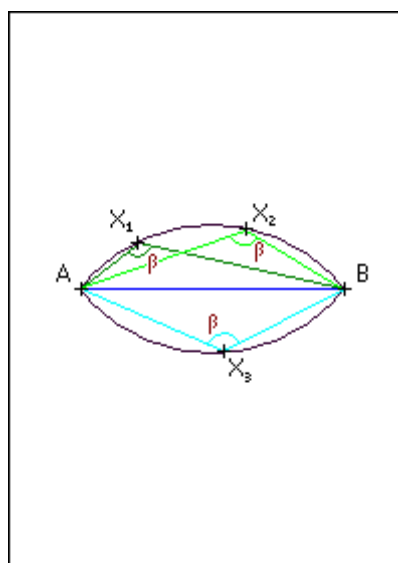


Středový a obvodový úhel,  
 $\omega$  nekonvexní.

Na daný oblouk lze nahlížet i jako na množinu bodů jisté vlastnosti. Velikost obvodového úhlu  $\alpha$  je stejná pro každý zvolený bod  $X$  na oblouku, tedy  $|\sphericalangle AXB| = \alpha$ . Množina všech bodů  $X$ , které mají tuto vlastnost, je tvořena sjednocením dvou otevřených oblouků vymezených body  $A, B$ . Tyto oblouky mají stejný poloměr a jsou osově souměrné podle přímky  $AB$ .

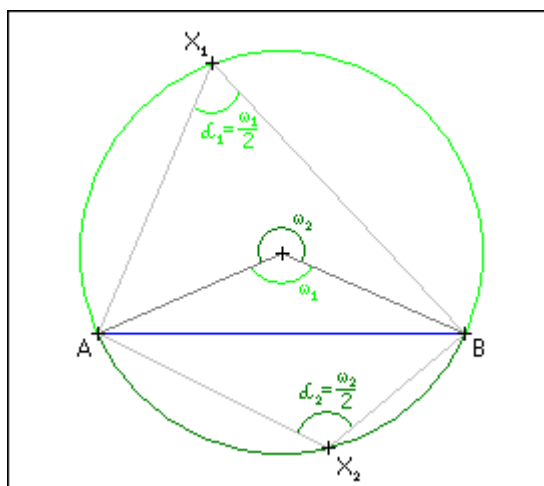


Množina bodů  $X$ ,  
pro které platí  
 $|\sphericalangle AXB| = \alpha$ .

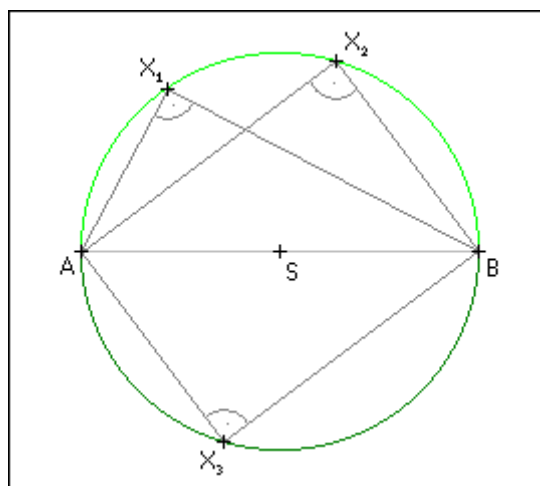


Množina bodů  $X$ ,  
pro které platí  
 $|\sphericalangle AXB| = \beta$ .

Velikost obvodového úhlu je polovina velikosti úhlu středového, tedy  $\alpha = \omega/2$ . Protože body  $A, B$  dělí původní kružnici na dva oblouky, menší a větší, je důležité si uvědomit, který z nich odpovídá kterému úhlu. Jestliže je středový úhel  $\omega$  konvexní, příslušný oblouk bude oblouk větší a jemu odpovídající obvodový úhel  $\alpha$  bude ostrý. Naopak, pokud je středový úhel nekonvexní, tupé obvodové úhly budou mít vrcholy na oblouku menším. Pro případ, kdy je středový úhel přímý a tedy obloukový úhel pravý, jsou oba oblouky půlkružnicemi. Množina bodů  $X$ , pro které je úhel  $AXB$  pravý, má až na body  $A, B$  tvar kružnice a nazývá se **Thaletova kružnice**.

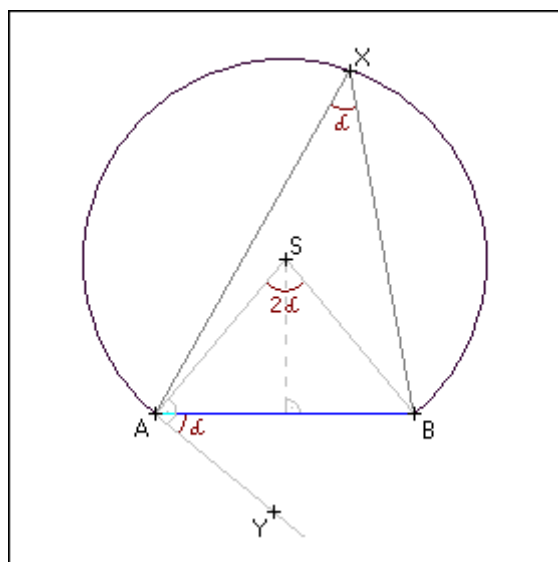


Vztah středového a obvodového úhlu a oblouku.



Thaletova kružnice nad úsečkou AB.

Při konstrukci oblouku nad úsečkou AB se používá **úhel úsekový**, jenž má velikost stejnou, jako budoucí příslušný úhel obvodový  $\alpha$ . K úsečce AB narýsujeme polopřímku AY, která s ní bude svírat úsekový úhel  $\alpha$ . K ní bodem A vztyčíme kolmici, jejímž průnikem s osou úsečky AB bude střed hledaného oblouku. Konstrukce Thaletovy kružnice a oblouku pro obecný obvodový úhel je podrobně rozvedena včetně appletu mezi příklady na kružnici.



Konstrukce oblouku nad úsečkou AB s použitím úsekového úhlu BAY.

**Sjednocení dvou oblouků** vymezených body A, B o stejném poloměru odpovídajících úhlu  $\alpha$  je množina M všech bodů X v rovině p takových, že

→ úsečka AB je z bodu X viditelná pod úhlem  $\alpha$ ,

$$M = \{X \in p; |\sphericalangle AXB| = \alpha\}$$