

POSLOUPNOSTI

Posloupnost je funkce, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel N .

Nekonečná posloupnost – definičním oborem je celá množina N .
například: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

Konečná posloupnost – definičním oborem je množina prvních n přirozených čísel.
například: $(a_n)_{n=1}^k$ $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

ROZDÍLY v zápisu funkce a posloupnosti

FUNKCE $g_{(4)} = 3$ funkční hodnota (v bodě 4 je rovna 3)	POSLOUPNOST $g_{(4)} = 3$ člen posloupnosti ($g_{(4)}$ je roven 3)
$f_{(x)} = y$ hodnota funkce (v bodě x se rovná y)	$a_n = s$ nebo $f_n = s$ n-tý člen posloupnosti (f je roven s)
$f_{(x)}: y = (-1)^x + 2; x \in N$	$((-1)^n + 2)_{n=1}^{\infty}$ nebo $(f_n)_{n=1}^{\infty}; f_n = (-1)^n + 2$

Grafem posloupnosti jsou izolované body o souřadnicích $[n; a_n]$, kde n je přirozené číslo, a_n je hodnota n -tého členu.

x	1	2	3	4	 konečná	$(a_n)_{n=1}^4$

x	1	2	3	4	... ∞	 nekonečná	$(a_n)_{n=1}^{\infty}$

1. řádek je u všech posloupností stejný (pouze jinak dlouhý).
Stačí psát jen 2. řádek.

1; 2; 2; 3; 2; 4; 2 konečná
1; 3; 1; 3; 1; ... nekonečná

Pořadí čísel y musím dodržet!

Jde o logiku = hledám další členy posloupnosti a vzorec pro n -tý člen.

URČENÍ (VYJÁDŘENÍ) POSLOUPNOSTI

1) **výčtem členů** = napíšu několik prvních členů

například: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}$ využít u konečné posloupnosti

2) **vzorcem pro n-tý člen** = obecný vzorec

například: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

3) **rekurentně** = zadání pomocí prvního nebo několika prvních členů a vztah pro výpočet dalších členů posloupnosti pomocí předcházejících

například: $a_1 = 1; a_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot a_n; n \in \mathbb{N}$

4) **graficky** = množina navzájem izolovaných bodů (využít u konečných posloupností)
(na přímce nebo v soustavě souřadnic)

Příklad: Zapiš jako posloupnost (a urči první 3 členy).

1) $f(x) = \frac{x}{x+1}; x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^6$

2) $g(x) = 2^x + x; x \in \mathbb{N}$ $(2^n + n)_{n=1}^{\infty}$

3) $h(x) = \frac{1}{x^2}; x \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ nejde o posloupnost
nekompletní podmnožina nemůže být definičním oborem (chybí 1, 2)
ale lze zapsat $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=3}^9$ nebo $(h_n)_{n=3}^9; h_n = \frac{1}{n^2}$

Příklad: Napiš vzorec pro n-tý člen.

1) Posloupnost všech přirozených násobků pěti.

2) Posloupnost všech N lichých čísel.

3) * Posloupnost všech N, které po dělení čtyřmi dávají zbytek 3.

Příklad: Z výpisu členů posloupnosti urči vzorec pro n-tý člen.

1) 1; 4; 9; 16; 25

2) -2; -5; -8; -11; -14; ...

3) 1; -3; 9; -27; 81; ...

Pokud se pravidelně mění znaménko, bude ve vzorečku člen $(-1)^n$ nebo $(-1)^{n-1}$.

Sestavený vzorec vyzkoušet dosazením (porovnávat 1. člen posloupnosti a 1. člen zkoušeného vzorce)

Pomůže vyjádřit všechny členy posloupnosti pomocí 1. členu a čísla n.

4) -3; 8; -13; 18; -23; 28; ...

5) * 3; 6; 12; 24; 48; ...

6) * 3; 0; 5; -2; 7; -4; 9; -6; 11; ...

Příklad: Napiš prvních 5 členů těchto posloupností.

1) $(2n + 1)_{n=1}^7$

2) $(3^{n-3})_{n=1}^{\infty}$

3) $(n^2 - 2n - 3)_{n=1}^4$

4) * $\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$

REKURENTNÍ ZADÁNÍ POSLOUPNOSTI

Znám 1. člen a vzorec pro výpočet dalších členů posloupnosti pomocí předcházejících.

Příklad: Napiš prvních sedm členů rekurentně zadaných posloupností.

1) $a_1 = 3$; $a_{n+1} = a_n + 2$; $n \in N$

2) $a_1 = -\frac{1}{4}$; $a_{n+1} = (-2)a_n$; $n \in N$

3) $a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n$; $n \in N$

4) $a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n + n$; $n \in N$
přičítám pořadí předchozí hodnoty v řadě

Nevýhoda: musím znát předcházející členy

5) * $a_1 = 2$; $a_{n+1} = 3|a_n| - (n + 1)^2$; $n \in N$

Příklad: K výpisům nekonečných posloupností napiš další 3 členy posloupnosti a pak je zapiš pomocí vzorce pro n-tý člen.

1) 2; 4; 6; 8; 10; ...

2) $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \dots$

3) 25; 5; 1; $\frac{1}{5}$; ...

4) 1; -1; 1; -1; ...

Příklad: Pro zadané posloupnosti urči členy a_n ; a_{n+1} ; a_{n-2} ; a_{2n} .

1) $\left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

2) $([-1]^n \cdot [n^2 + 2n])_{n=1}^{\infty}$

Příklad: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zadanou vzorcem pro n-tý člen $a_n = 4n - 7$ vyjádřete rekurentně.

VLASTNOSTI POSLOUPNOSTI

rostoucí	$a_{n+1} > a_n$	} monotónní posloupnosti
klesající	$a_{n+1} < a_n$	
nerostoucí	$a_{n+1} \leq a_n$	
neklesající	$a_{n+1} \geq a_n$	

omezená shora	$a_n \leq h$	$h, d \in \mathbb{R}$
omezená zdola	$a_n \geq d$	

omezená = je omezená shora i zdola zároveň

KONEČNÁ posloupnost = obsahuje konečný počet členů

NEKONEČNÁ posloupnost = obsahuje nekonečný počet členů $D = \mathbb{N}$

KONSTANTNÍ posloupnost = $a_{n+1} = a_n$

Příklad: Urči vlastnosti posloupnosti.

1) $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

2) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

3) $\left(\frac{n}{5}\right)_{n=1}^{\infty}$

Příklady navíc: d

1) Určete prvních šest členů posloupnosti dané rekurentně a sestrojte graf:

$$a_1 = -1, a_2 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n.$$

2) Matematicky rozhodněte, zda je daná posloupnost rostoucí či klesající:

$$\left(\frac{n+1}{3n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

3) Matematicky dokažte, že je daná posloupnost omezená:

$$\left(\frac{2n+3}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$