

TRIGONOMETRIE

= řeší úlohy o trojúhelnících pomocí goniometrických funkcí

PRAVOÚHLÉ TROJÚHELNÍKY

- Pythagorova věta
- definice goniometrických funkcí
- Euklidovy věty

$$c^2 = a^2 + b^2$$

sin, cos, tg, cotg

$$v^2 = c_a \cdot c_b$$

$$a^2 = c \cdot c_a$$

$$b^2 = c \cdot c_b$$

OBEČNÉ TROJÚHELNÍKY

- Sinová věta
- Kosinová věta
- další trigonometrické věty
 - obsah trojúhelníka
 - Heronův vzorec

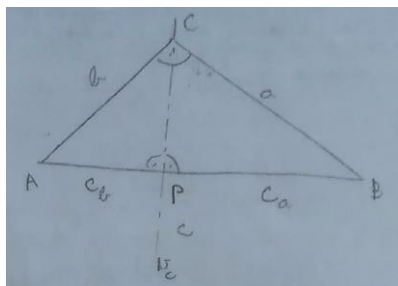
PRAVOÚHLÝ TROJÚHELNÍK

Výška v_c rozdělí pravoúhlý trojúhelník na dva další pravoúhlé trojúhelníky.

Bod P rozdělí přeponu na 2 úseky.

c_a ... úsek přepony přilehlý ke straně a

c_b ... úsek přepony přilehlý ke straně b



trojúhelníky jsou podobné

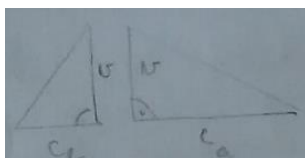
$$\triangle ABC \sim \triangle ACP \sim \triangle CBP$$

Z podobnosti trojúhelníků, které vytvoří výška v pravoúhlém trojúhelníku, odvodíme vzorec pro výšku a odvěsny.

Euklidovy věty

1) Euklidova věta o výšce

$$v^2 = c_a \cdot c_b$$

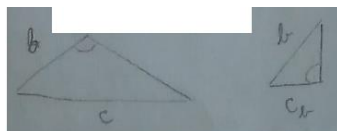


$$\frac{\text{kratší odvěsna}}{\text{delší odvěsna}} = \frac{v}{c_a} = \frac{c_b}{v} \longrightarrow v^2 = c_a \cdot c_b$$

2) Euklidova věta o odvěsně

$$a^2 = c \cdot c_a$$

$$b^2 = c \cdot c_b$$



$$\frac{\text{přepona}}{\text{kratší odvěsna}} = \frac{c}{b} = \frac{b}{c_b} \longrightarrow b^2 = c \cdot c_b$$

V každém pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami a, b a přeponou c platí:

$$a = \sqrt{c \cdot c_a}, \quad b = \sqrt{c \cdot c_b}, \quad v = \sqrt{c_a \cdot c_b}$$

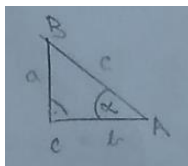
kde v je výška na přeponu a c_a, c_b jsou úseky přepony přilehlé ke stranám a, b .

Pythagorova věta

$$c^2 = a^2 + b^2$$

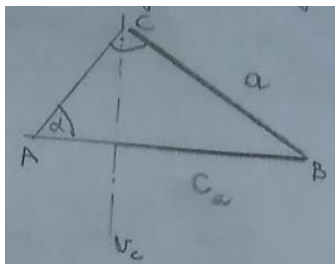
Goniometrické funkce pro trojúhelník ABC ($\gamma = 90^\circ$)

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$$

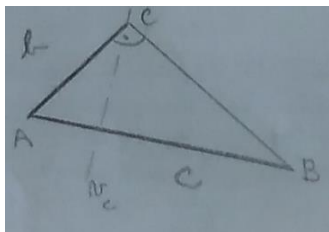


Příklady: Vypočítejte zbývající prvky ($a, b, c, c_a, c_b, v, \alpha, \beta$) v pravoúhlém trojúhelníku ABC ($\gamma = 90^\circ$), je-li dáno:

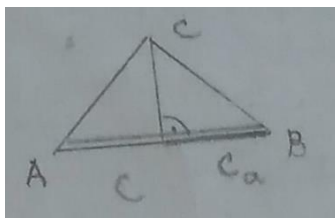
1) $a = 5 \text{ cm}, c_a = 4 \text{ cm}$



2) $b = 5 \text{ cm}, c = 13 \text{ cm}$



3) $c = 10 \text{ cm}, c_a = 7 \text{ cm}$



4) $c = 10 \text{ cm}, c_b = 6 \text{ cm}$

5) $c = 5 \text{ cm}, b = 3 \text{ cm}$

6) $a = 6 \text{ cm}, c_a = 3 \text{ cm}$

7) $c = 15 \text{ cm}, c_b = 9 \text{ cm}$

8) $c_a = 14 \text{ cm}, a = 21 \text{ cm}$

9) $c_b = 8 \text{ cm}, v = 6 \text{ cm}$

10) $a = 9 \text{ cm}, c = 12 \text{ cm}$

OBECNÝ TROJÚHELNÍK

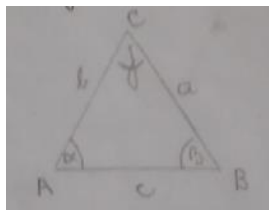
= vztahy mezi délkami stran a velikostmi úhlů v libovolném trojúhelníku

1) SINOVÁ věta

= pro každý trojúhelník ABC , jehož vnitřní úhly mají velikost α, β, γ a strany mají délky a, b, c platí:

$$2r = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

poloměr kružnice opsané



POUŽÍVANÉ TVARY SINOVÉ VĚTY:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

„Poměr délek stran se rovná poměru sinů velikosti protilehlých úhlů.“

POUŽITÍ:

- a) znám jednu stranu a dva úhly
- b) znám dvě strany a úhel proti jedné z nich

Příklad: Určete zbývající strany a vnitřní úhly v trojúhelníku ABC , je-li dáno:

1) $c = 20 \text{ cm}$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 105^\circ$

PŘI VÝPOČTECH SE SNAŽÍME:

- co nejvíc vycházet z údajů daných v zadání (vyhnu se chybě)
- délky zaokrouhlovat na 2 desetinná místa
- úhly s přesností na minuty

2) $a = 10 \text{ cm}$, $\beta = 100^\circ$, $\gamma = 50^\circ$

3) $b = 48,55 \text{ cm}$, $\gamma = 6^\circ 30'$, $\alpha = 69^\circ 40'$

4) $a = 52 \text{ cm}$, $\beta = 63^\circ 14'$, $\gamma = 57^\circ 43'$

5) $c = 20 \text{ cm}$, $\alpha = 105^\circ$, $\beta = 30^\circ$

6) $a = 12,8 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$, $\alpha = 58^\circ 30'$

7) $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 100^\circ$, $a = 2,6 \text{ m}$

8) $b = 34 \text{ cm}$, $\alpha = 50^\circ$, $\gamma = 75^\circ$

9) $a = 18 \text{ cm}$, $c = 23 \text{ cm}$, $\gamma = 84^\circ$

10) $c = 66 \text{ cm}$, $\beta = 30^\circ$, $\alpha = 105^\circ$

Úlohy neřešitelné pomocí Sinové věty řešíme Kosinovou větou. Kosinová věta je zobecněním věty Pythagorovy pro obecný trojúhelník. Pythagorova věta je speciální případ Kosinové věty pro pravoúhlý trojúhelník.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 90^\circ$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

2) KOSINOVÁ věta

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

POUŽITÍ:

- a) znám délky všech stran, ale neznám vnitřní úhly
- b) znám 2 strany a úhel jimi sevřený

Příklady: Určete délky všech stran a velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC

- 1) $a = 16,9 \text{ cm}$, $b = 26 \text{ cm}$, $c = 27,3 \text{ cm}$
- 2) $a = 4 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$
- 3) V trojúhelníku ABC : $a = 20 \text{ cm}$, $b = 18 \text{ cm}$, $c = 13 \text{ cm}$.
Určete velikost vnitřních úhlů.
- 4) Trojúhelník ABC má délky stran 4 cm , 5 cm , 6 cm .
Určete velikosti jeho vnitřních úhlů.
- 5) V trojúhelníku ABC : $b = 10 \text{ cm}$, $c = 15 \text{ cm}$, $\alpha = 60^\circ$.
Určete zbývající strany a úhly.
- 6) V trojúhelníku ABC : $a = 4,3 \text{ cm}$, $b = 3,1 \text{ cm}$, $\gamma = 57^\circ 31'$.
Určete zbývající strany a úhly.

Příklady: Určete délky všech stran a velikosti vnitřních úhlů užitím sinové a kosinové věty

- 1) $a = 11,6 \text{ cm}$, $c = 9 \text{ cm}$, $\alpha = 65^\circ 30'$
- 2) $a = 51,32 \text{ cm}$, $c = 34,76 \text{ cm}$, $\beta = 126^\circ 12'$
- 3) Řešte trojúhelník ABC , je-li dáno
 $b = 16,7 \text{ cm}$, $\alpha = 24^\circ 15'$, $\gamma = 112^\circ$.
- 4) Řešte trojúhelník ABC , je-li dáno
 $a = 64,5 \text{ m}$, $b = 53 \text{ m}$, $c = 41,8 \text{ m}$.
- 5) Místa A a B jsou spojena přímým tunelem. Určete jeho délku, znáte-li vzdálenosti $|AC| = 185 \text{ m}$, $|BC| = 273 \text{ m}$ a úhel $\alpha = 78^\circ 42'$.

Další trigonometrické věty

3) OBSAH TROJÚHELNÍKA

- a) Pokud znám 2 strany a úhel jimi sevřený

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \cdot \sin \beta$$

„Pro každý trojúhelník ABC , jehož vnitřní úhly mají velikost α, β, γ a strany délky a, b, c platí: $\uparrow$ „

- b) **Heronův vzorec** (pro obsah trojúhelníka bez určování vnitřních úhlů)

$$S = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

$$s = \frac{1}{2} o$$

Příklady: Určete obsah trojúhelníku, je-li dáno:

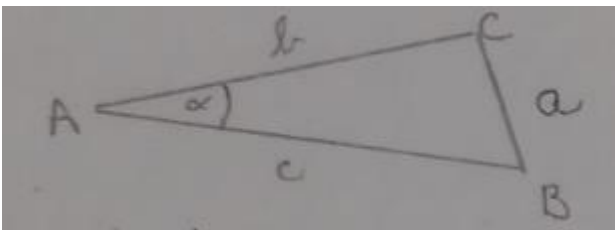
- 1) $a = 14\text{ m}$, $b = 20\text{ m}$, $c = 7\text{ m}$
- 2) $a = 7,5\text{ cm}$, $c = 9,2\text{ cm}$, $\beta = 134^\circ$
- 3) $b = 6,7\text{ m}$, $\beta = 38^\circ$, $\gamma = 73^\circ$

Příklady: Určete obsah trojúhelníku, je-li dáno:

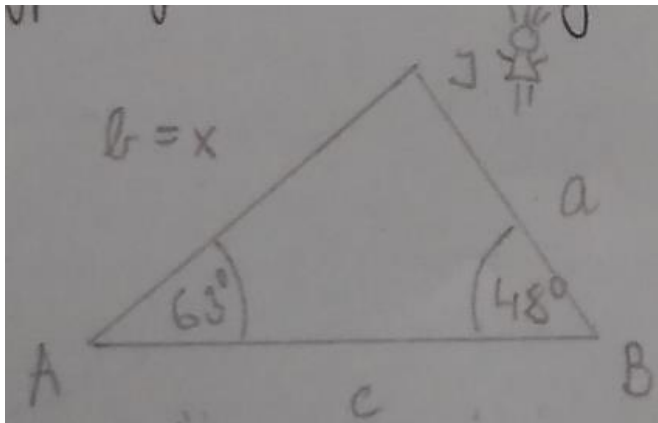
- a) $a = 15,4\text{ cm}$, $b = 19,9\text{ cm}$, $c = 25,7\text{ cm}$
- b) $a = 13\text{ cm}$, $b = 16\text{ cm}$, $\gamma = 58^\circ 10'$
- c) $a = 25,1\text{ cm}$, $\alpha = 63^\circ$, $\beta = 38^\circ$

TRIGONOMETRIE V PRAXI

- 1) Dvě chodby z místa A svírají úhel $\alpha = 37^\circ 46'$. Jejich délky jsou $c = 137,8\text{ m}$, $b = 105,3\text{ m}$. Jak dlouhá bude spojovací chodba na jejich konci?



- 2) Jana je pozorována ze dvou míst A, B , která jsou od sebe vzdálena 975 m . Úhel $BAJ = 63^\circ$, úhel $ABJ = 48^\circ$. Vypočítej vzdálenost Jany od místa A .



- 3) Hajný sleduje pás lesa o délce 70 m , přičemž od jednoho konce je vzdálen 80 m a od druhého 30 m . Jak velký je jeho zorný úhel?

