

GONIOMETRIE A TRIGONOMETRIE

GONIOMETRICKÉ ROVNICE

Základní goniometrické rovnice:

$$g(x) = a$$

jedna z goniometrických funkcí
(sin, cos, tg, cotg)

$$a \in \mathbb{R}$$

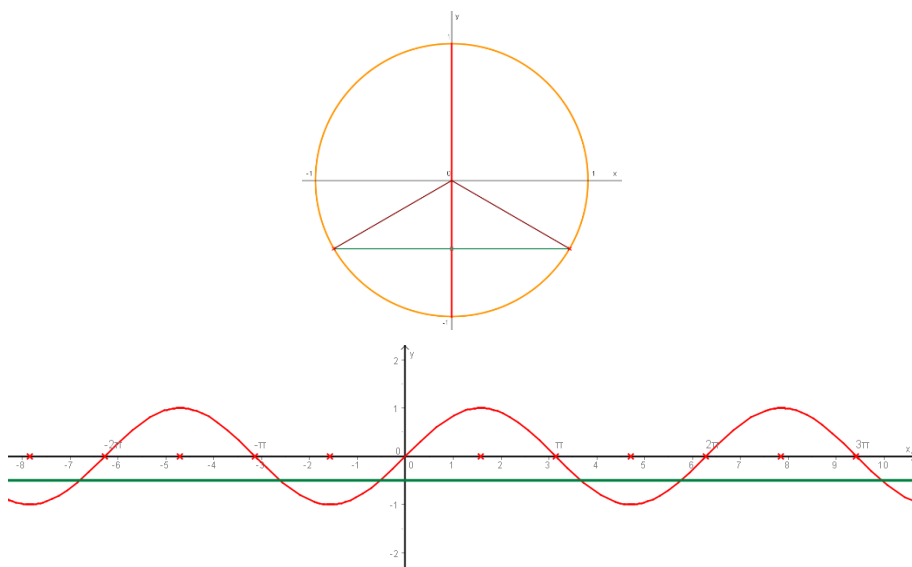
ZÁKLADNÍ řešení

= množina všech jejích kořenů z intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ nebo $\langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$.

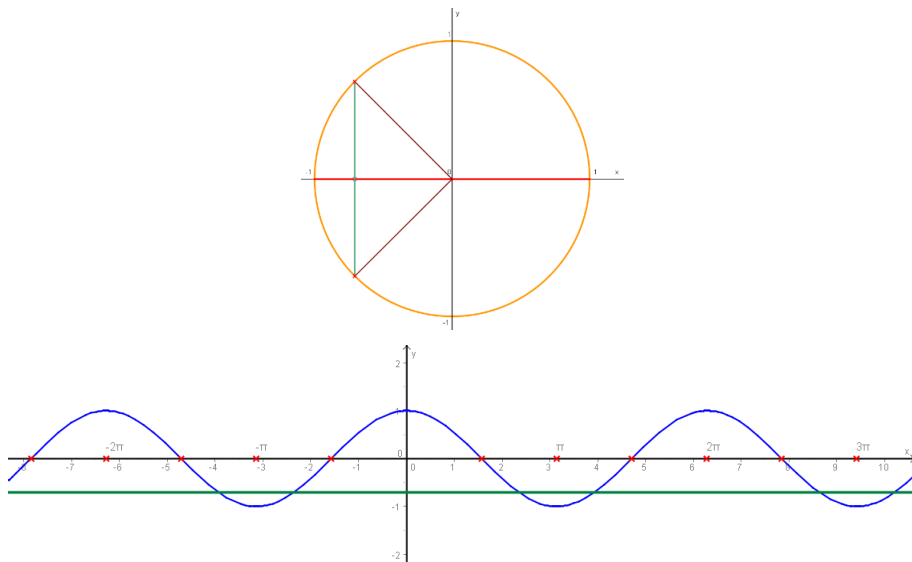
MNOŽINA VŠECH řešení je v $\mathbb{R}$; vyjádří se jako $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}$

Příklad: Najděte základní řešení a poté zapište množinu všech řešení

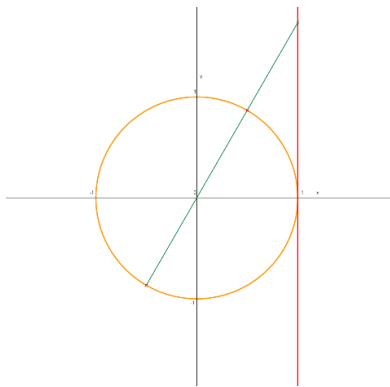
1) $\sin x = -\frac{1}{2}$



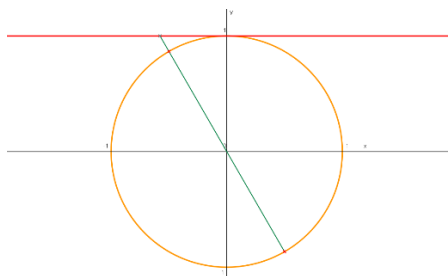
2) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



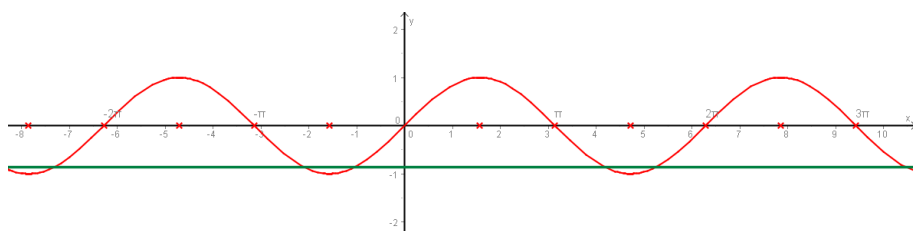
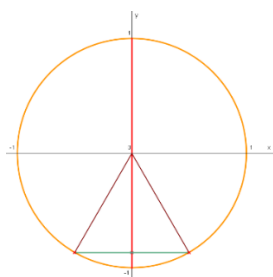
$$3) \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$



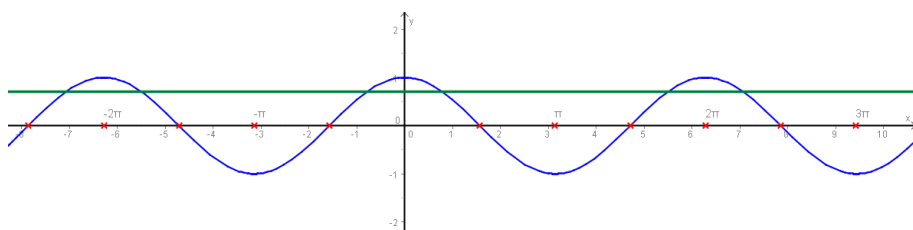
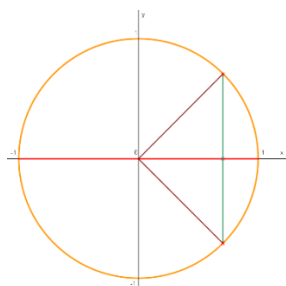
$$4) \operatorname{cotg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$5) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

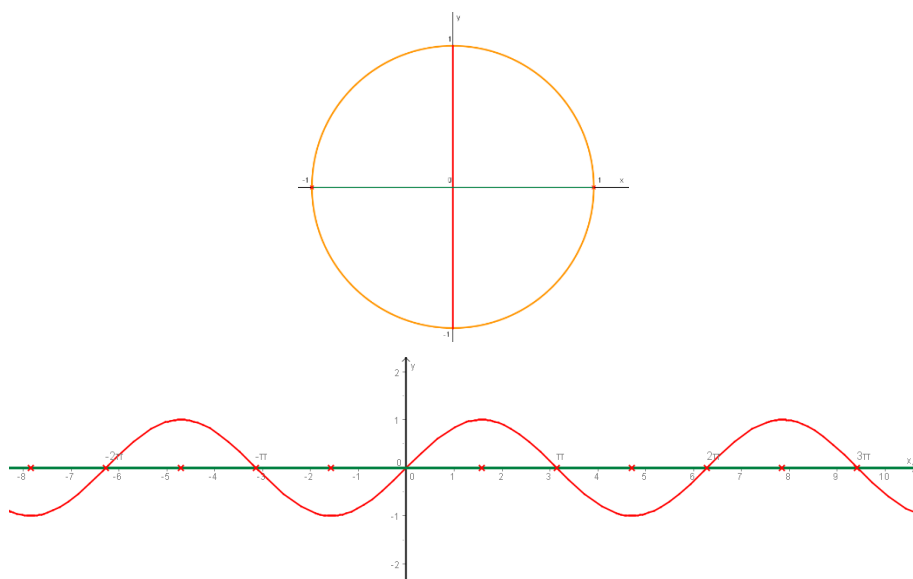


$$6) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

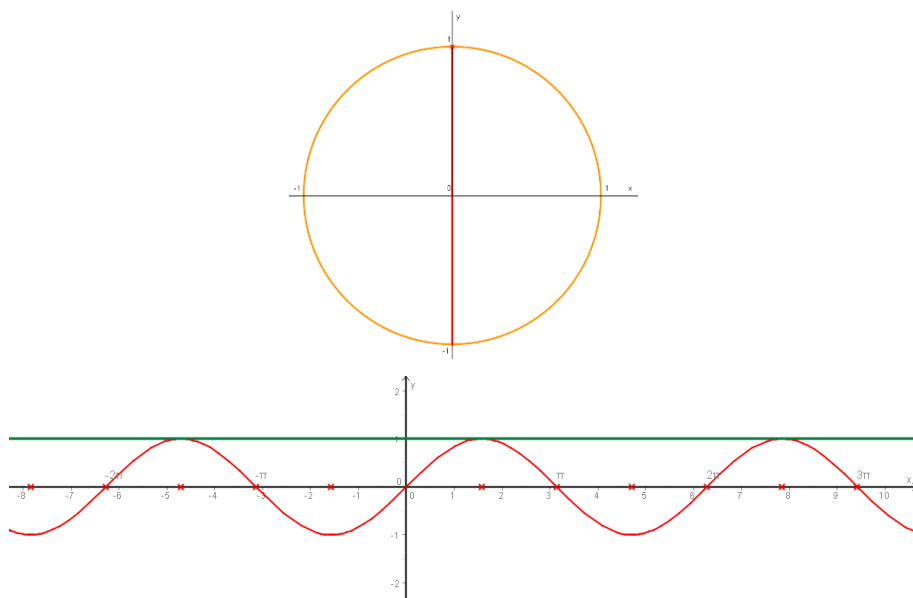


Příklady na opakování: Řešte v $\mathbf{R}$ rovnice a výsledné hodnoty zakreslete na jednotkové kružnici. Najděte základní řešení a poté zapište množinu všech řešení.

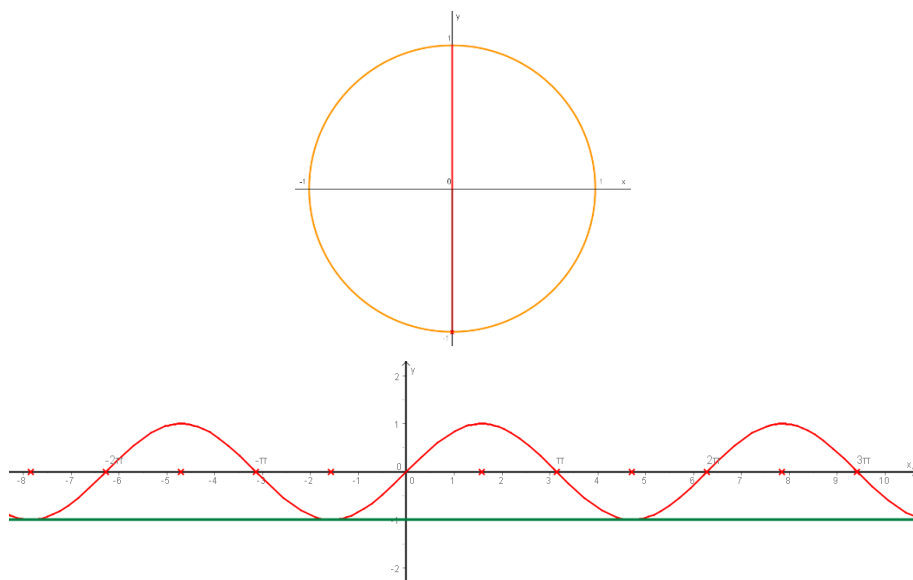
1) $\sin x = 0$



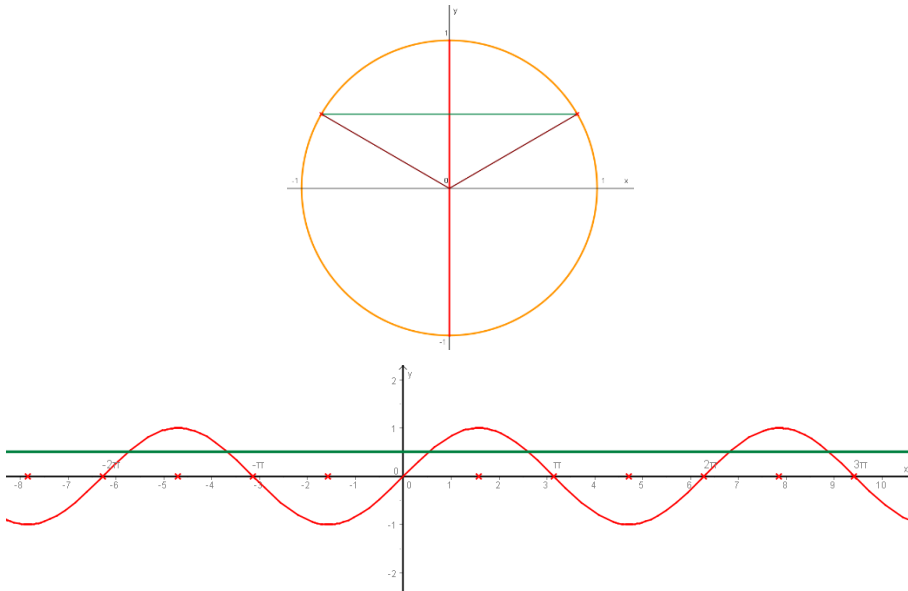
2) $\sin x = 1$



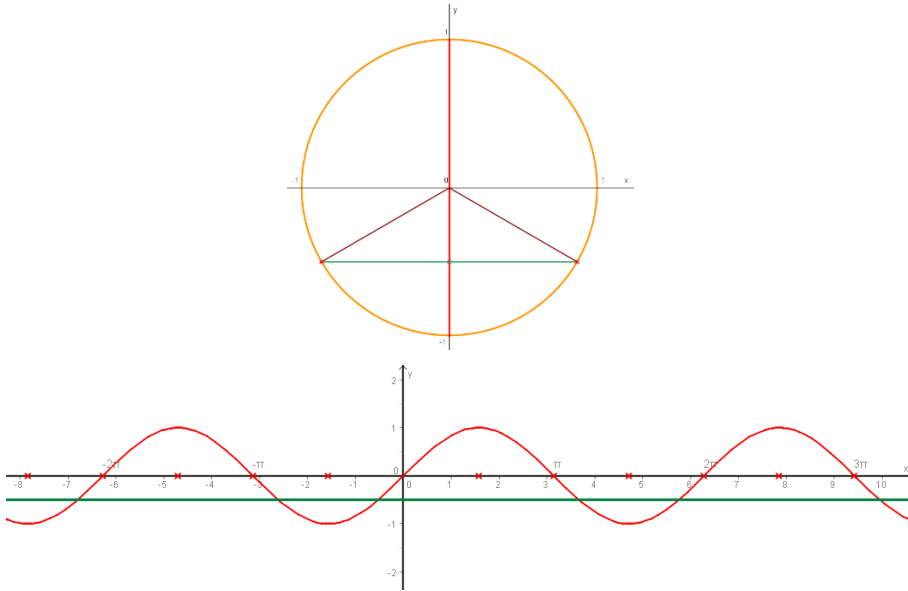
3) $\sin x = -1$



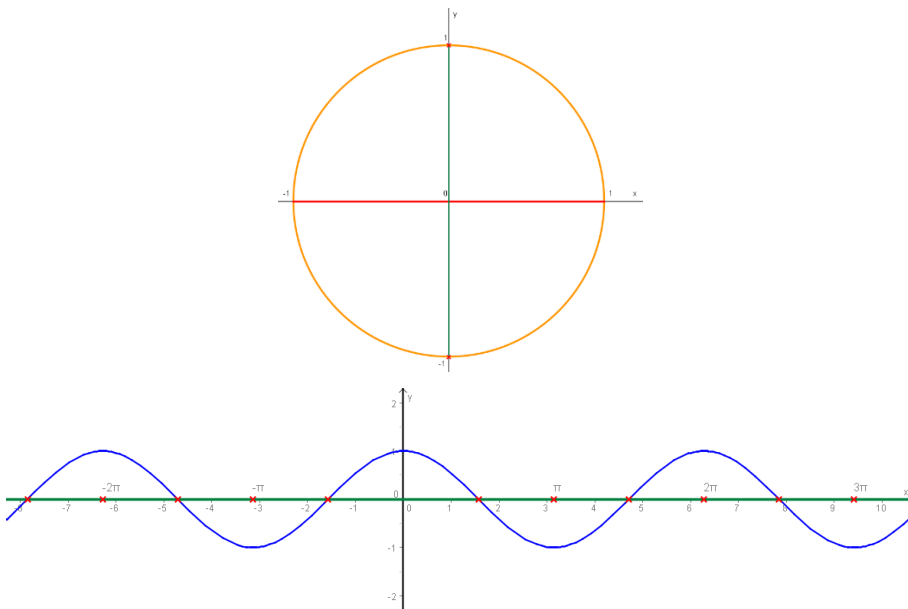
4) $\sin x = \frac{1}{2}$



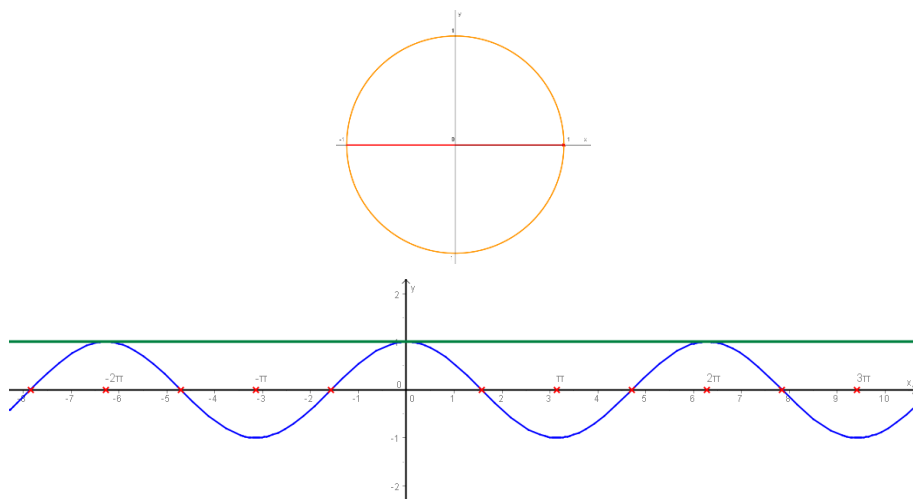
5) $\sin x = -\frac{1}{2}$



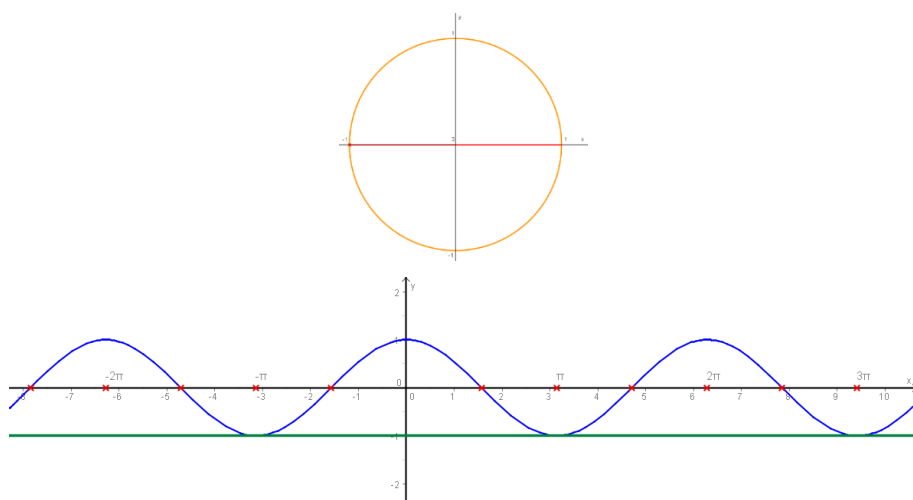
6) $\cos x = 0$



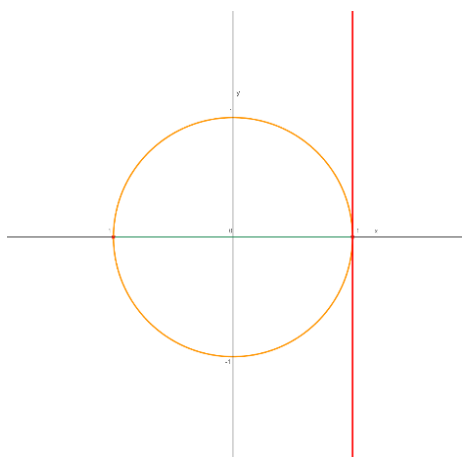
7) $\cos x = 1$



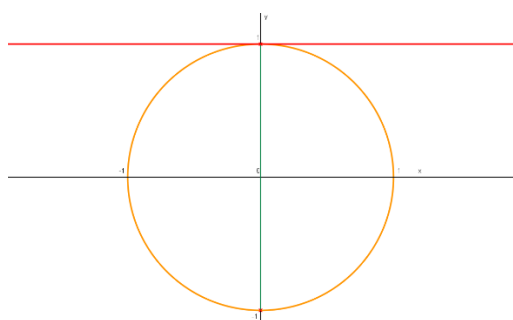
8) $\cos x = -1$



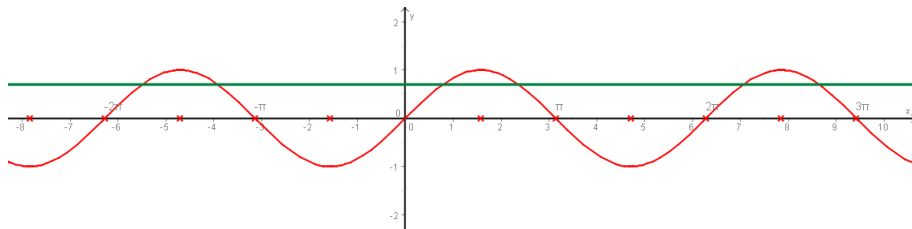
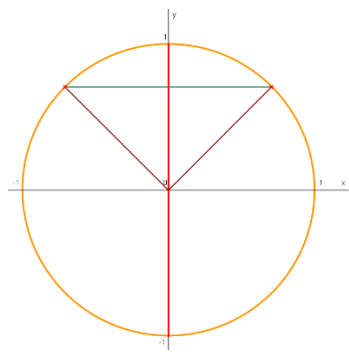
9) $\operatorname{tg} x = 0$



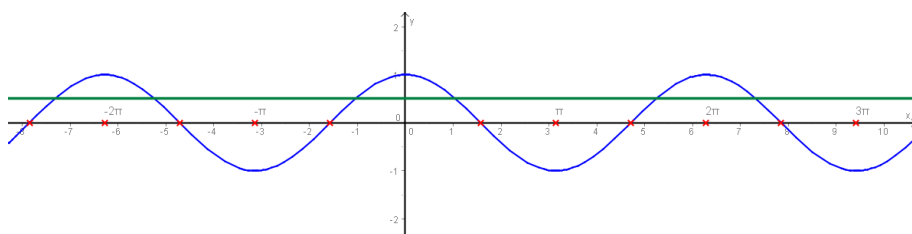
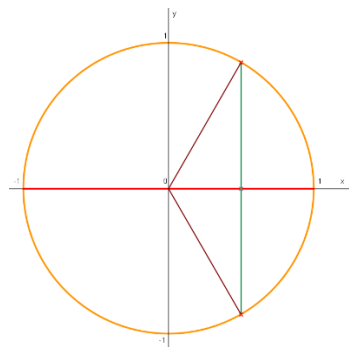
10) $\operatorname{cotg} x = 0$



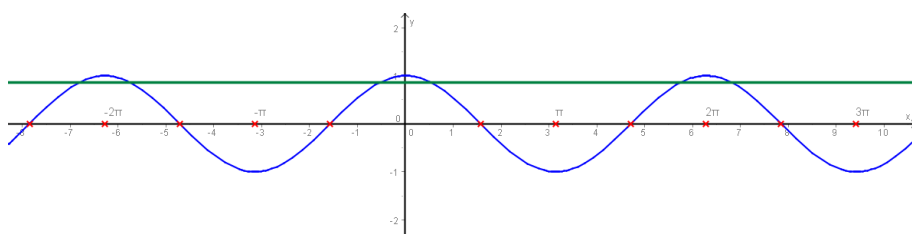
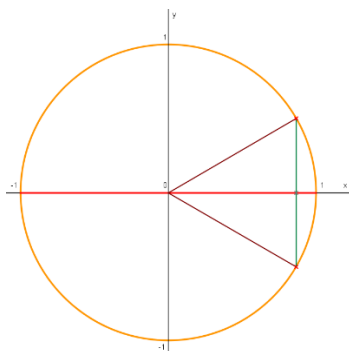
$$11) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



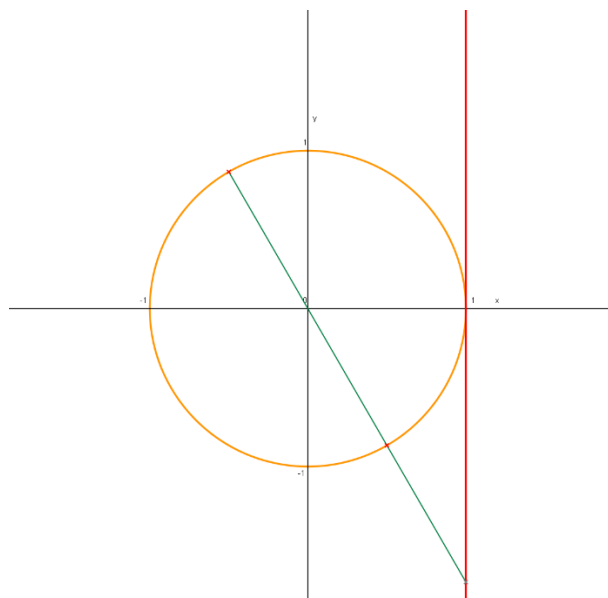
$$12) \cos x = \frac{1}{2}$$



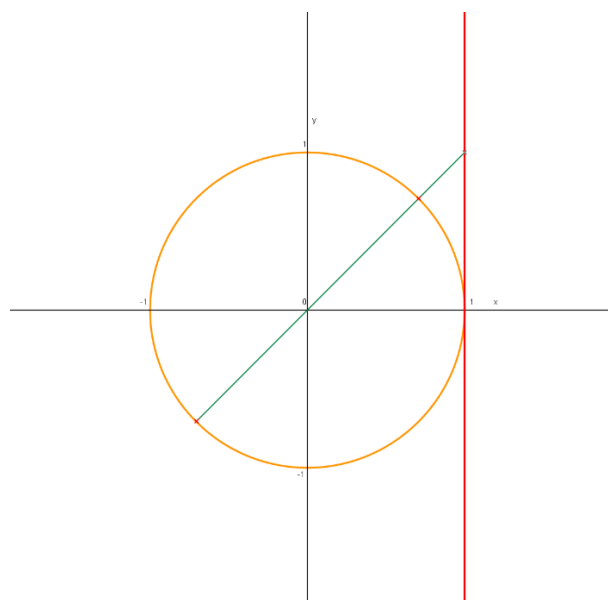
$$13) \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



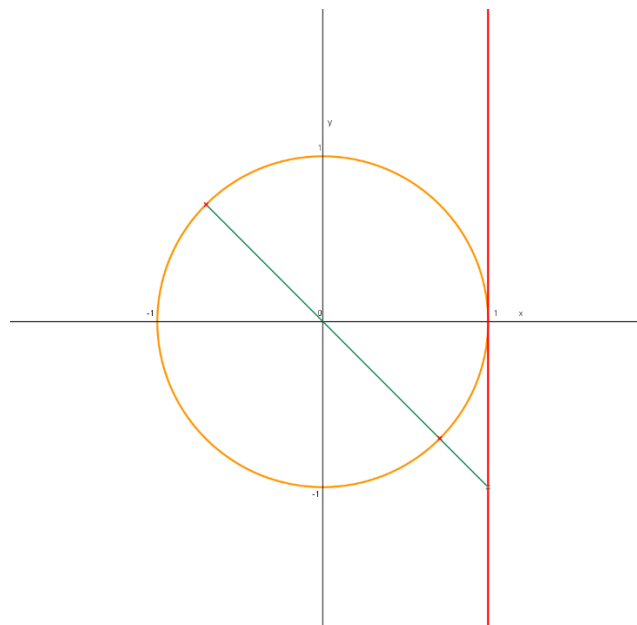
14) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$



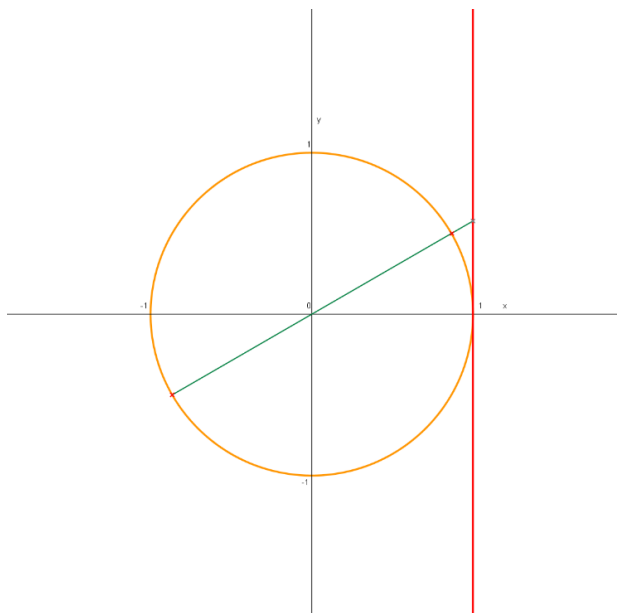
15) $\operatorname{tg} x = 1$



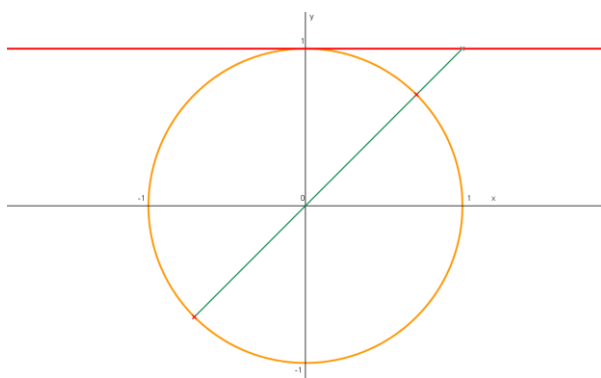
16) $\operatorname{tg} x = -1$



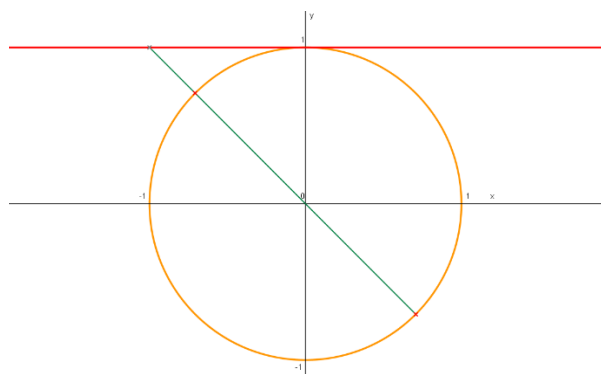
$$17) \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



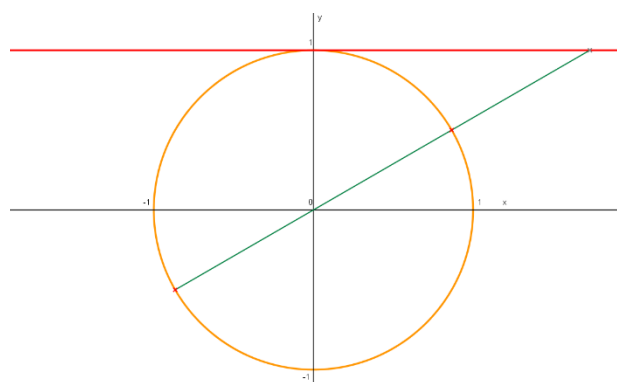
$$18) \operatorname{cotg} x = 1$$



$$19) \operatorname{cotg} x = -1$$



$$20) \operatorname{cotg} x = \sqrt{3}$$



DALŠÍ GONIOMETRICKÉ ROVNICE

Řešení substitucí = vždy, když je místo x jiný tvar
(např. $3x, 5x, 3x + \pi, \frac{\pi}{4} - 2x, \dots$)

SUBSTITUTE = nahrazení výrazu novou neznámou

Příklad: Dané rovnice řešte pomocí substituce

- 1) $\cos 3x = \frac{1}{2}$
- 2) $2 \sin(3x + \pi) = -1$
- 3) $\sin 2x = \frac{1}{2}$
- 4) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$
- 5) $\operatorname{tg} 3x = -1$

Příklad: Řešte goniometrické rovnice využitím:

substitute + kvadratické rovnice

$\sin, \cos \in \langle -1; 1 \rangle$

- 1) $2 \sin^2 x - \sin x = 0$
- 2) $2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 = 0$
- 3) $\sin^2 x + 5 \sin x + 4 = 0$
- 4) $4 \cos^2 x + 4 \cos x + 1 = 0$
- 5) $(3 \sin x - 2) - (\sin x - 3)^2 + 11 = 0$

Příklady na opakování: Vyřešte v $\mathbf{R}$ goniometrickou rovnici

- | | |
|--|---|
| 1) $\sin 3x = 0$ | 9) $\sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 2) $\sin 2x = \frac{1}{2}$ | 10) $\cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 3) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ | 11) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ |
| 4) $\cos 6x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 12) $\cos \frac{x}{7} = -1$ |
| 5) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$ | 13) $\operatorname{tg} \frac{x}{3} = 0$ |
| 6) $\operatorname{tg} 3x = -1$ | 14) $\operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3}$ |
| 7) $\sin 3x = 1$ | 15) $\operatorname{tg} 4x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 8) $\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 16) $\operatorname{cotg} 2x = -1$ |

Příklady na opakování: Vyřešte v $\mathbf{R}$ goniometrickou rovnici

- | | |
|--|--|
| 1) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$ | 6) $\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 2) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 7) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ |
| 3) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 8) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ |
| 4) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ | 9) $\cos\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$ |
| 5) $\operatorname{cotg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ | |

Příklady na opakování: Řešte goniometrické rovnice využitím substituce

- 1) $4 \sin^2 x - 4 \sin x + 1 = 0$
- 2) $(\cos x - 4)(4 \cos x - 3) + 3 = 0$
- 3) $(2 \sin x + 1)(\sin x - 3) + (2 \sin x - 1)(\sin x + 2) = 4 \sin x - 1$
- 4) $2 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x = 2 (\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x) + \sqrt{3}$
- 5) $\operatorname{cotg}^2 x - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{cotg} x = 0$

VZTAHY MEZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI

GONIOMETRICKÉ VZORCE

- 1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $x \in R$
- 2) $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$
- 3) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- 4) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- 5) $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- 6) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$ $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in Z$

SOUČTOVÉ VZORCE

- 1) $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
- 2) $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$
- 3) $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
- 4) $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

Příklad: Řešte rovnici s využitím goniometrických vzorců

- 1) $2 \cos^2 x = \sin x + 1$ v rovnici je $\sin x$ i $\cos x$
pomocí vzorce upravím na rovnici
s jednou goniometrickou funkcí
 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
- 2) $\cos x - 1 = \sin^2 x$
- 3) $3 \cos^2 x = \sin^2 x$
- 4) $\cos 2x - \sin x = 0$
- 5) $3 \cos x = 2 \sin^2 x$

Příklady: na součtové vzorce

- 1) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) =$
- 2) $\sin(\pi - x) =$
- 3) $-\sin(2\pi - x) =$
- 4) $\cos(x + \pi) =$
- 5) $\sin(x - \pi) =$

Příklad: Vyřešte goniometrickou rovnici na součtové vzorce

1) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin x = 1$

2) $\sin^2 x - \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 2$

3) $\cos(2\pi + x) + \cos x = -1$

4) $\sin x - \sin(x + \pi) = \sqrt{3}$

5) $\cos^2 x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$

Příklad na opakování: Řešte rovnice s využitím goniometrických vzorců

1) $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$

2) $2 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{cotg} x = 1$

3) $\operatorname{tg} x (\sin x - 1) = \frac{1}{2 \cos x} - \cos x$

4) $\sin 3x = \cos 3x$

5) $\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} + 4 \operatorname{cotg} x = 0$

6) $2 + \cos 2x = -5 \sin x$

7) $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$

8) $2 \cos^2 x = \sin^2 x - 1$

9) $6 \sin^2 x - 7 \cos x - 1 = 0$

10) $3 \sin x = 2 \cos^2 x$

11) $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$

12) $2\sqrt{3} \sin^2 x = \cos x$

13) $\sin x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$

14) $3 \cos^2 x - 4 \cos x - \sin^2 x - 2 = 0$

15) $3 \cos x = 2 \sin^2 x$

16) $\cos 2x + \sin x = 0$

Další příklady na součtové vzorce: Zjednodušte

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$

2) $\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) =$

3) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) =$

4) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) =$

5) $\sin(x + 2\pi) =$

6) $\cos(4\pi - x) =$

7) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) =$

8) $\cos(\pi - x) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) =$