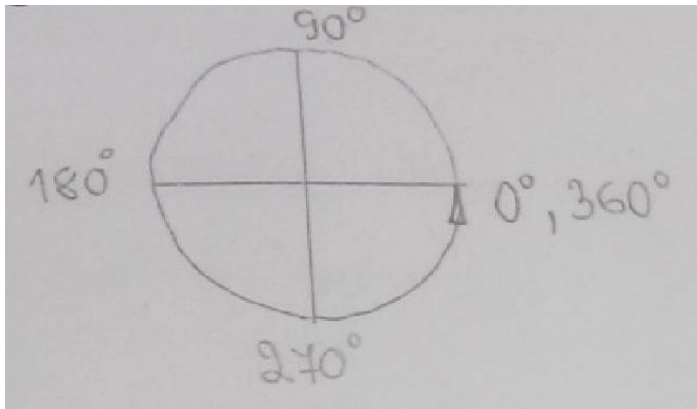


GONIOMETRIE A TRIGONOMETRIE

VELIKOST ÚHLU VE STUPŇOVÉ A OBLOUKOVÉ MÍŘE

1) STUPŇOVÁ míra



1 otáčka = 360°

1° úhlový **stupeň** = $\frac{1}{90}$ pravého úhlu

$1'$ úhlová **minuta** = $\frac{1}{60}$ stupně

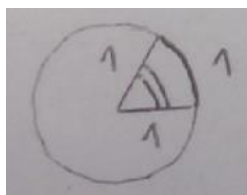
$1''$ úhlová **vteřina** = $\frac{1}{60}$ minuty

$1^\circ = 60' = 3600''$

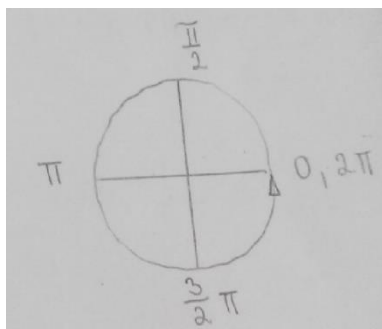
2) OBLOUKOVÁ míra

jednotkou je radián (**rad**)

Definice: Radián je středový úhel, který přísluší na jednotkové kružnici oblouku o délce 1.



$1 \text{ rad} = 57^\circ 14' 45''$



PŘEPOČTY rad na stupně a opačně

- $\frac{\alpha^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha [\text{rad}]}{\pi}$
- $\alpha = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \cdot \pi$
- $\alpha^\circ = \frac{\alpha}{\pi} \cdot 180^\circ$

Příklady: Dané úhly vyjádři v radiánech

- $30^\circ =$
- $8^\circ =$
- $5^\circ =$
- $140^\circ =$
- $18^\circ =$

Příklad: Dané úhly vyjádři ve stupních

a) $\frac{\pi}{15} [\text{rad}] =$

b) $\frac{\pi}{5} =$

c) $\frac{\pi}{12} =$

d) $\frac{\pi}{8} =$

e) $\frac{\pi}{7} =$

f) $\frac{\pi}{9} =$

g) $\frac{\pi}{180} =$

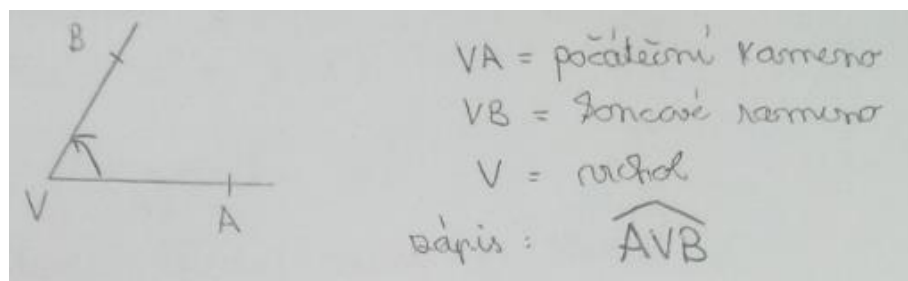
h) $\frac{\pi}{90} =$

i) $\frac{\pi}{3} =$

úhel [°]	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
úhel [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π

ORIENTOVANÝ ÚHEL

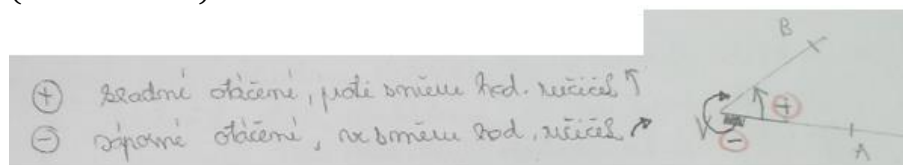
je úhel určený dvěma polopřímkami se společným počátkem (vrcholem), kde jedna je počáteční a druhá koncová.



VELIKOST ORIENTOVANÉHO ÚHLU

je každé číslo, jehož absolutní hodnota udává, o kolik radiánů nebo stupňů se musí otočit počáteční rameno, aby splýnulo s koncovým.

Každý úhel má nekonečně velikostí, které se liší podle násobku otáčení (**360°** nebo **2π**).



ZÁKLADNÍ VELIKOST ORIENTOVANÉHO ÚHLU

je vždy v kladném směru otáčení.

$\alpha \in (0^\circ; 360^\circ)$ nebo $\alpha \in (0; 2\pi)$

Příklad: Urči další velikosti orientovaného úhlu

j) $30^\circ =$

k) $\frac{\pi}{3} =$

Příklad: Urči základní velikost orientovaného úhlu

1) $\widehat{ABC} = -30^\circ$

2) $-\frac{\pi}{6} = \widehat{CAB}$

3) $\widehat{BCA} = -60^\circ$

4) $\widehat{CBA} = -\frac{\pi}{3}$

Příklad: Urči základní velikost orientovaného úhlu a zakresli úhel na jednotkovou kružnici:

a) u **kladných úhlů** odečítáme $k \cdot 360^\circ$ (nebo $k \cdot 2\pi$)

b) u **záporných úhlů** přičítáme periodu $k \cdot 360^\circ$ ($k \cdot 2\pi$)

1) $1220^\circ =$

2) $-1826^\circ =$

Další příklady: + vyznačit na jednotkové kružnici barevně

a) $778^\circ =$

b) $935^\circ =$

c) $755^\circ =$

d) $700^\circ =$

e) $575^\circ =$

f) $740^\circ =$

g) $1128^\circ =$

h) $418^\circ =$

i) $425^\circ =$

j) $-333^\circ =$

k) $-1567^\circ =$

l) $-126^\circ =$

m) $-315^\circ =$

Příklady v rad:

1) $\frac{23}{4}\pi =$

2) $-\frac{17}{4}\pi =$

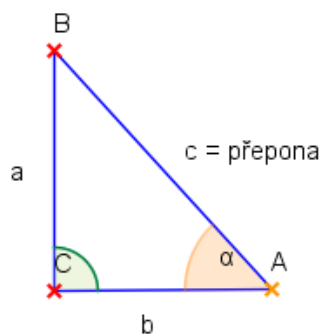
3) $19\pi =$

GONIOMETRICKÉ FUNKCE V PRAVOÚHLÉM TROJÚHELNÍKU

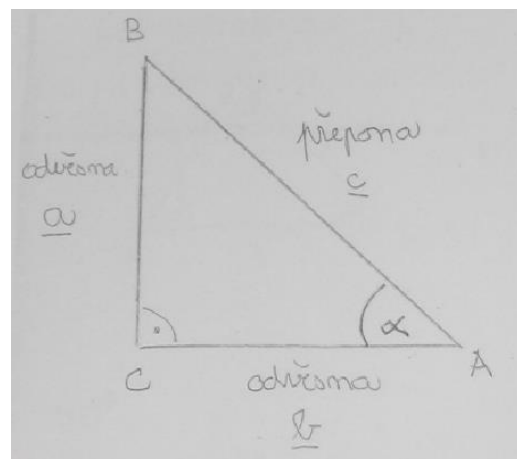
(TRIGONOMETRIE PRAVOÚHLÉHO TROJÚHELNÍKU)

= zabývá se vztahy mezi stranami a úhly trojúhelníku

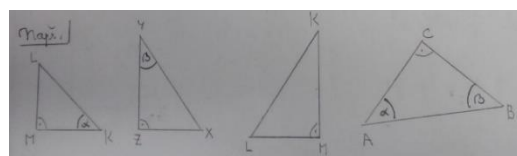
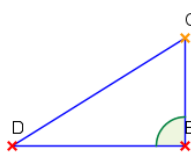
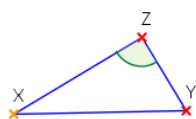
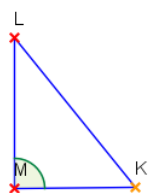
Pro každý pravoúhlý Δ platí:



$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{a}{c} && \left(\frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{ku přeponě}} \right) \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} && \left(\frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{ku přeponě}} \right) \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b} && \left(\frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{ku přilehlé odvěsně}} \right) \\ \operatorname{cotg} \alpha &= \frac{b}{a} && \left(\frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{ku protilehlé odvěsně}} \right)\end{aligned}$$



Příklad: Zapiš goniometrické funkce pro různě označené trojúhelníky.



GONIOMETRICKÉ FUNKCE OSTRÉHO ÚHLU

α°	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{cotg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Příklad 1: Urči délky obou odvěsen v ΔABC ($\gamma = 90^\circ$) s přeponou 5 cm a úhlem $\alpha = 30^\circ$.

Příklad 2: V pravoúhlém ΔABC s pravým úhlem u vrcholu C je $a = 7$ cm, $c = 8$ cm. Vypočítej velikost úhlu α a β .

Příklad 3: V pravoúhlém ΔABC ($\gamma = 90^\circ$) je $\alpha = 42^\circ$, $a = 7$ cm. Urči délku přepony a délku druhé odvěsny.

Příklad 4: V pravoúhlém ΔABC ($\gamma = 90^\circ$) je $c = 6$ cm, $\alpha = 30^\circ$. Urči délky obou odvěsen.

Příklad 5: V pravoúhlém ΔABC ($\gamma = 90^\circ$) je $c = 6$ cm, $\alpha = 45^\circ$. Urči délky obou odvěsen.

	0°	30°	45°	60°	90°
sin α					
cos α					
tg α					
cotg α					

ZÁKLADNÍ HODNOTY GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ (30°, 45°, 60°)

ROVNOSTRANNÝ TROJÚHELNÍK

ROVNOSTRANNÝ Δ

dopočítat výšku pomocí PYTHAGOROVY VĚTY

$$2^2 = r^2 + 1^2$$

$$r = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

30°

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\operatorname{cotg} 30^\circ = \sqrt{3}$

60°

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
 $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ $\operatorname{cotg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ROVNORAMENNÝ TROJÚHELNÍK

ROVNORAMENNÝ Δ

dopočítáme přeponu

$$c^2 = 1^2 + 1^2$$

$$c = \sqrt{2}$$

$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$
 $\operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \operatorname{cotg} 45^\circ$

TABULKA

Z odvozených hodnot sestavíme tabulku a doplníme ji i o úhly 0° a 90°.

	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nedef.
cotg α	nedef.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

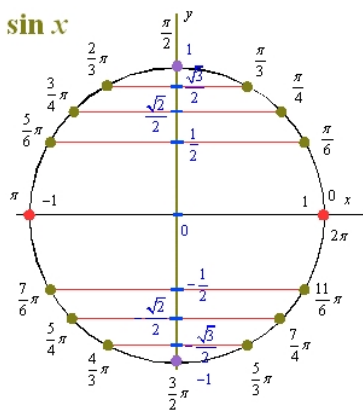
Snadno zapamatovatelná **Tabulka hodnot goniometrických funkcí**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin(x)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	0	-1	0
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg}(x)$	$\frac{\sqrt{0}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{9}}{3}$	$\frac{\sqrt{27}}{3}$	-	0	-	0
$\operatorname{cotg}(x)$	-	$\frac{\sqrt{27}}{3}$	$\frac{\sqrt{9}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{0}}{3}$	-	0	-

Standardní **Tabulka hodnot goniometrických funkcí**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\operatorname{cotg}(x)$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

sin x

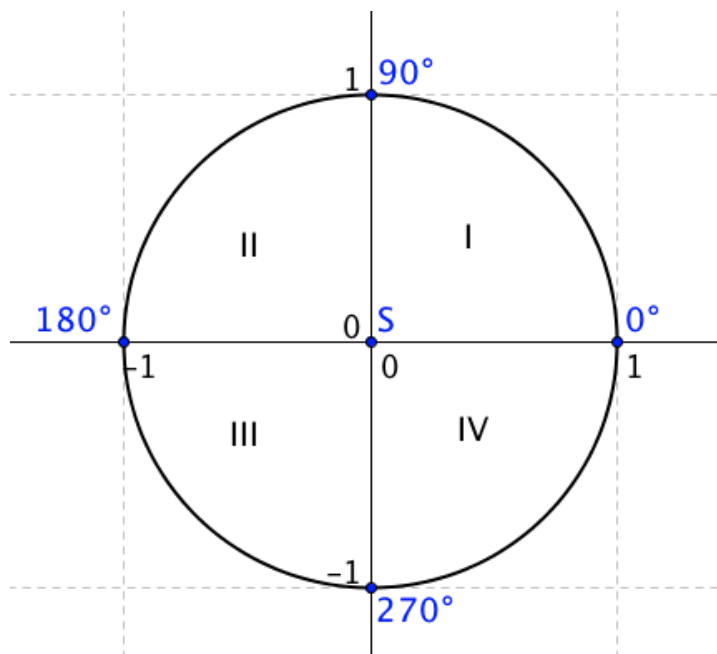


JEDNOTKOVÁ KRUŽNICE A PROCVIČOVÁNÍ SINU A KOSINU

Jednotková kružnice je obyčejná kružnice, která je bezrozměrná, přesněji poloměr této kružnice je roven jedné. Jednotková kružnice slouží k znázornění definic jednotlivých goniometrických funkcí.

Co je to jednotková kružnice

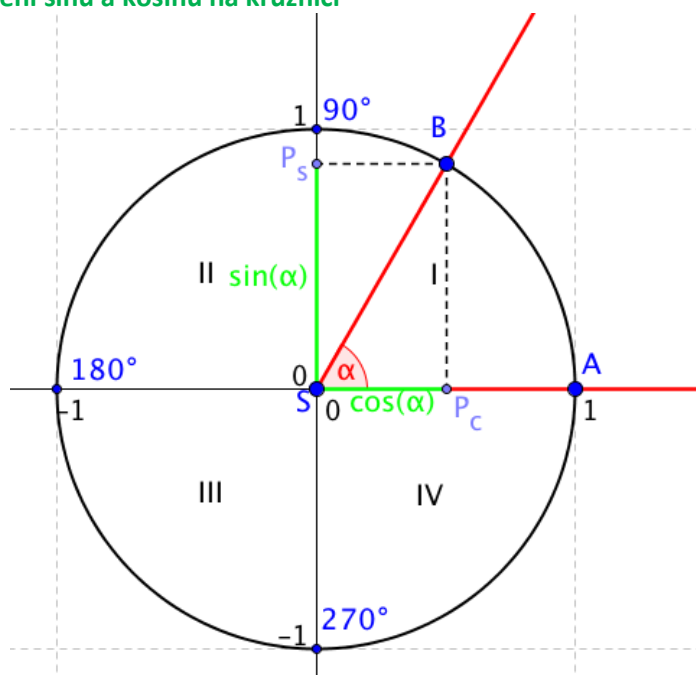
Jednotková kružnice je kružnice, která má poloměr délky jedné a střed této kružnice se nachází ve středu souřadnicového systému, tedy v bodě $[0, 0]$.



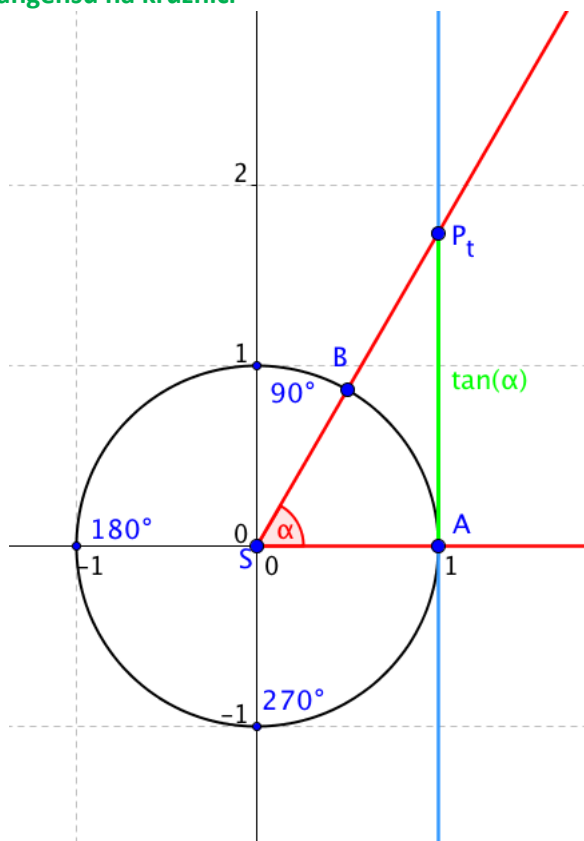
Co je to kvadrant

Kružnice je dále rozdělena do čtyř částí, kterým říkáme **kvadranty**. Vpravo nahoře je **kvadrant první**, vlevo nahoře **druhý**, vlevo dole **třetí** a vpravo dole **čtvrtý**. Protože tuto kružnici budeme používat k **znázorňování úhlů**, jsou na kružnici zvýrazněny stupně. Tam, kde je nula stupňů, tam obvykle začíná rameno úhlu a směřuje nahoru. Proto je bod $[0, 1]$ označen pravým úhlem.

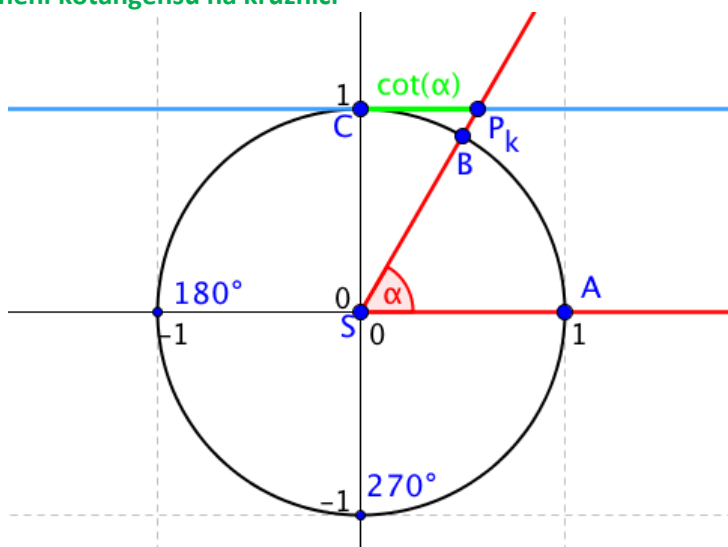
Znázornění sinu a kosinu na kružnici



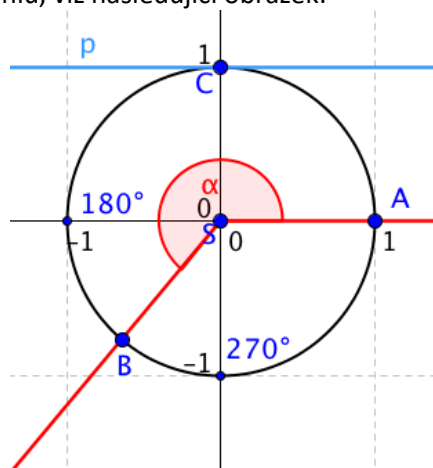
Znázornění tangensu na kružnici



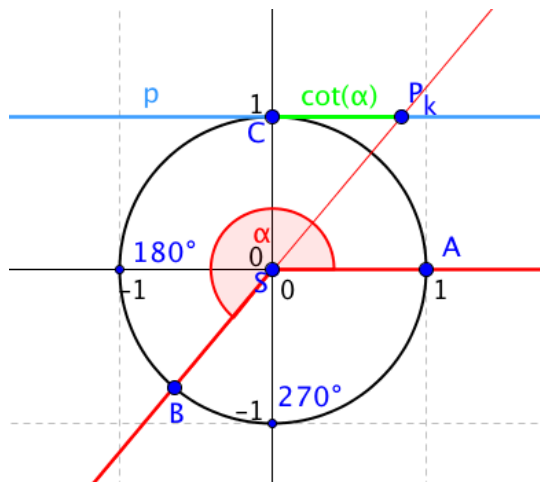
Znázornění kotangensu na kružnici



Otázkou je, co se stane, pokud bude úhel α větší než 90 stupňů u tangensu a větší než 180 stupňů u kotangensu, protože v těchto případech přímka neprotne rameno úhlu, viz následující obrázek:



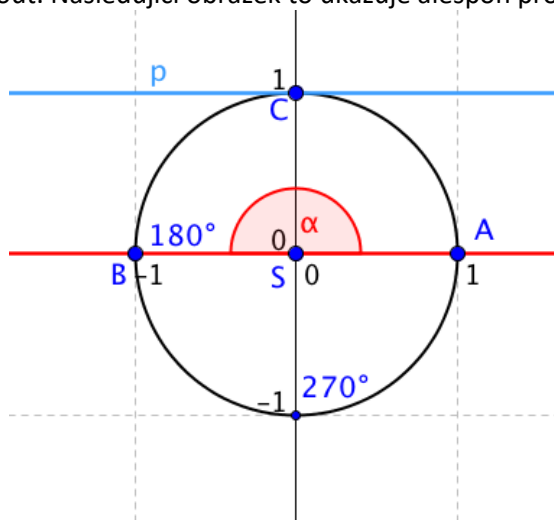
V tuto chvíli uděláme z polopřímky SB přímkou a tato přímka už přímku p protne.



Podobně bychom postupovali i v případě tangensu.

Kdy není tangens a kotangens definovaný

Na jednotkové kružnici si můžeme všimnout jedné zajímavé věci. Pokud je úhel α roven **180 stupňům**, potom se přímka p a rameno úhlu nikdy neprotnou, protože budou **rovnoběžné**. Jak opravíme tento problém? Nijak, **kotangens 180 stupňů není definovaný**. Podobně **není definovaný tangens 90 stupňů**, protože takové rameno bude **rovnoběžné** s přímkou, se kterou by se mělo protnout. Následující obrázek to ukazuje alespoň pro **kotangens**.



Příklad 1: Vyjádři dané úhly v radiánech nebo ve stupních

- a) $18^\circ =$
- b) $120^\circ =$
- c) $\frac{3}{4}\pi =$
- d) $\frac{3}{2}\pi =$

Příklad 2: Urči základní velikost orientovaného úhlu

- a) $-260^\circ =$
- b) $-18^\circ =$
- c) $1512^\circ =$
- d) $1040^\circ =$

Příklad 3: Urči základní velikost orientovaného úhlu, urči kvadrant na jednotkové kružnici a hodnotu goniometrické funkce

a) $\sin 570^\circ =$

b) $\cos 1050^\circ =$

Příklad 4: Urči kvadrant na jednotkové kružnici, základní řešení goniometrické funkce a zapiš množinu všech řešení

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Příklad 5: Urči základní velikost orientovaného úhlu a hodnotu funkce

a) $\sin 750^\circ =$

k) $\sin \frac{2}{3}\pi =$

b) $\sin 1125^\circ =$

l) $\sin \frac{5}{4}\pi =$

c) $\sin 1140^\circ =$

m) $\cos \frac{7}{4}\pi =$

d) $\cos 2220^\circ =$

e) $\cos 405^\circ =$

n) $\sin 1200^\circ =$

f) $\sin \frac{13}{2}\pi =$

o) $\cos 930^\circ =$

g) $\sin \frac{33}{4}\pi =$

p) $\sin 870^\circ =$

h) $\cos \frac{13}{6}\pi =$

q) $\cos 945^\circ =$

i) $\cos \frac{43}{3}\pi =$

r) $\cos 810^\circ =$

j) $\cos \frac{7}{6}\pi =$

s) $\sin 990^\circ =$

VZTAHY MEZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI

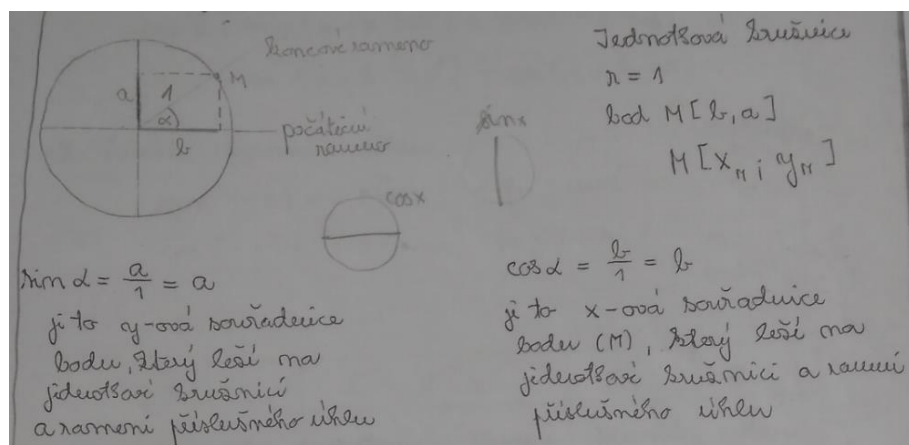
- $\text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{cotg } \alpha}$
- $\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- $\text{cotg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

Příklady:

- 1) V pravoúhlém trojúhelníku ABC ($\gamma = 90^\circ$) je $\alpha = 40^\circ$, velikost odvěsny $a = 9 \text{ cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.
- 2) Sázíme stromky 3,5 m od sebe. Jak daleko budeme sázet na svahu, chceme-li zachovat vodorovnou vzdálenost 3,5 m. Sklon svahu je 25° .
- 3) Jak vysoký je komín, který vidíme ze vzdálenosti 20 m pod úhlem 45° .

FUNKCE SINUS A KOSINUS

(zkráceně **sin(x)**, **cos(x)**)



Počáteční rameno je vždy kladná část osy x

Hodnoty funkce $\sin \alpha$ hledám na ose y

Hodnoty funkce $\cos \alpha$ hledám na ose x

I. kvadrant	II. kvadrant	III. kvadrant	IV. kvadrant
$\sin \alpha \oplus$ $\cos \alpha \oplus$ který úhel	$\sin \alpha \oplus$ $\cos \alpha \ominus$ $180^\circ - \alpha$	$\sin \alpha \ominus$ $\cos \alpha \ominus$ $180^\circ + \alpha$	$\sin \alpha \ominus$ $\cos \alpha \oplus$ $360^\circ - \alpha$

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Vlastnosti funkcí:

1) **Periodičnost** = obě jsou periodické, nejmenší perioda je 2π (360°)

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin(\alpha + k \cdot 2\pi)$$

$$\cos \alpha = \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos(\alpha + k \cdot 2\pi)$$

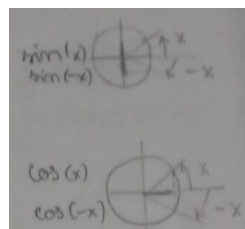
2) **Funkce záporného úhlu**

$$\sin(-x) = -\sin x$$

funkce je **LICHÁ**

$$\cos(-x) = \cos x$$

funkce je **SUDÁ**

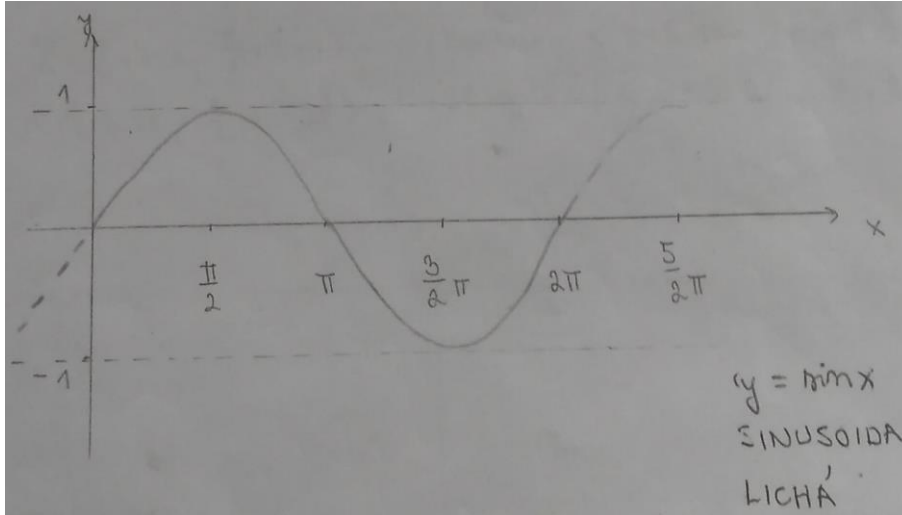


	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	rostoucí	klesající	klesající	rostoucí
$\cos \alpha$	klesající	klesající	rostoucí	rostoucí

- Obě funkce **kmitají** mezi $y = \langle -1; 1 \rangle$
- Perioda je 2π
- Inverzní funkce k sinus je funkce **ARCUSSINUS**
- Inverzní funkce ke cosinus je funkce **ARCUSCOSINUS**

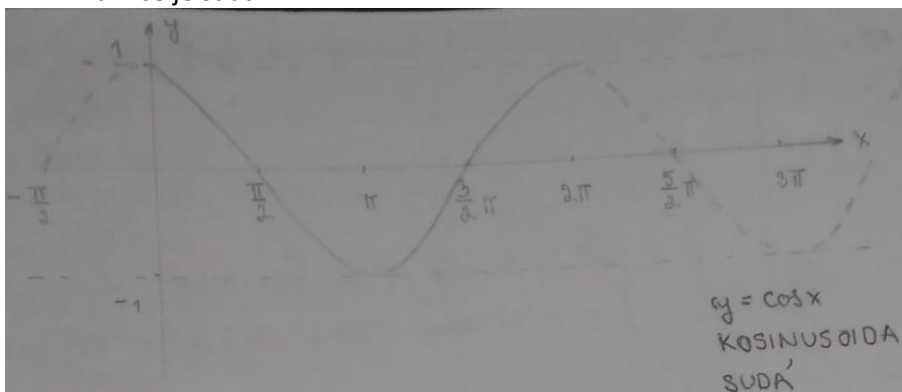
Graf funkce sinus:

- $y = \sin x$
- Grafem je **SINUSOIDA**
- Funkce je lichá



Graf funkce kosinus:

- $y = \cos x$
- Grafem je **KOSINUSOIDA**
- Funkce je sudá



Funkce sinus a kosinus a jejich vlastnosti:

$y = \sin x$ 	$y = \cos x$
$D(f) = \mathbb{R}$ $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$ sféra i odola omezená periodická (nejmenší perioda 2π) není pětá	
$\max = 1$ v bode $\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2\pi$ $\min = -1$ v bode $\frac{3}{2}\pi + 2 \cdot 2\pi$	$\max = 1$ v bode $0 + 2 \cdot 2\pi$ $\min = -1$ v bode $\pi + 2 \cdot 2\pi$
LICHÁ $f: f(-x) = -f(x)$ $\sin(-x) = -\sin(x)$	SUDÁ $f: f(x) = f(-x)$ $\cos(-x) = \cos(x)$
rostoucí v $\langle -\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2\pi; \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2\pi \rangle$ klesající v $\langle \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2\pi; \frac{3}{2}\pi + 2 \cdot 2\pi \rangle$	rostoucí v $\langle \pi + 2 \cdot 2\pi; 2\pi + 2 \cdot 2\pi \rangle$ klesající v $\langle 0 + 2 \cdot 2\pi; \pi + 2 \cdot 2\pi \rangle$

Příklady: Urči hodnoty funkcí $\sin(x)$ a $\cos(x)$

l) $x = 120^\circ$

m) $x = 210^\circ$

n) $x = 315^\circ$

o) $x = 150^\circ$

Příklady: Urči hodnoty goniometrických funkcí

1) $\cos \frac{7}{6}\pi =$

2) $\sin \frac{2}{3}\pi =$

3) $\cos \frac{7}{4}\pi =$

4) $\sin \frac{5}{4}\pi =$

5) $\cos \frac{5}{6}\pi =$

Příklady: Urči hodnotu funkcí (vše dohromady)

5) $\sin 750^\circ =$

6) $\cos 405^\circ =$

7) $\sin 1140^\circ =$

8) $\cos 2220^\circ =$

9) $\sin 1125^\circ =$

10) $\sin 1200^\circ =$

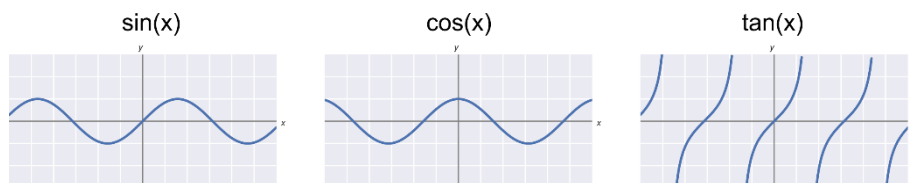
11) $\cos 930^\circ =$

12) $\sin 930^\circ =$

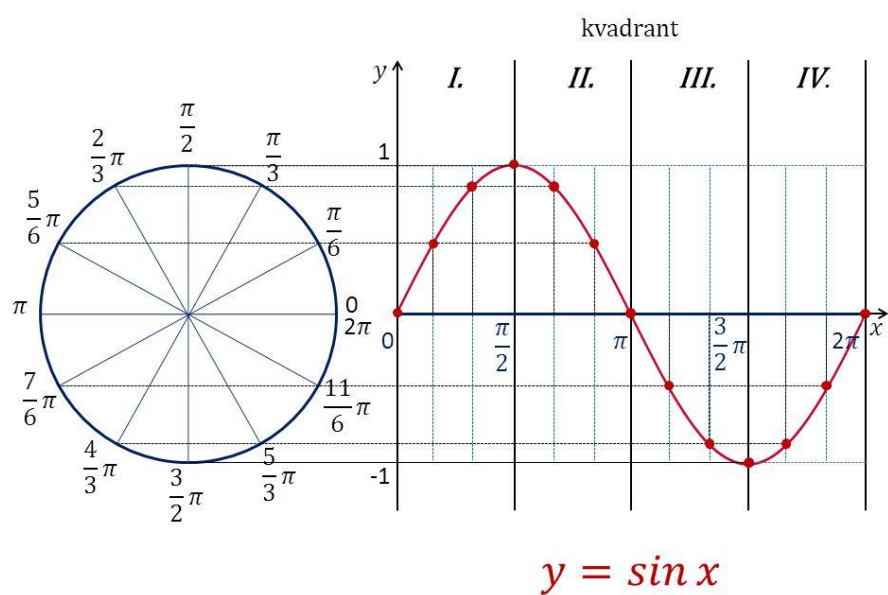
GRAFY FUNKCÍ SINUS A KOSINUS

Grafy goniometrických funkcí se často a přirozeně vyskytují i volně v přírodě. Zde si ukážeme, jaká je jejich základní podoba a jak se mohou měnit v závislosti na argumentu.

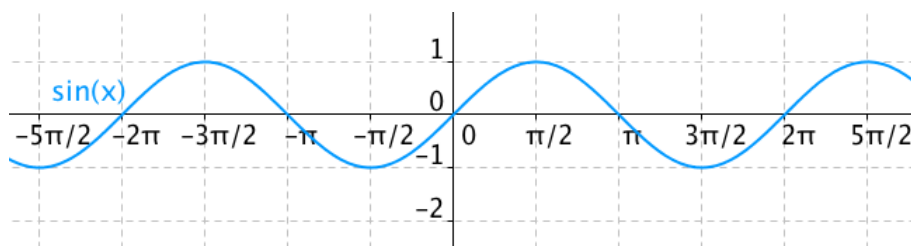
Grafy základních goniometrických funkcí



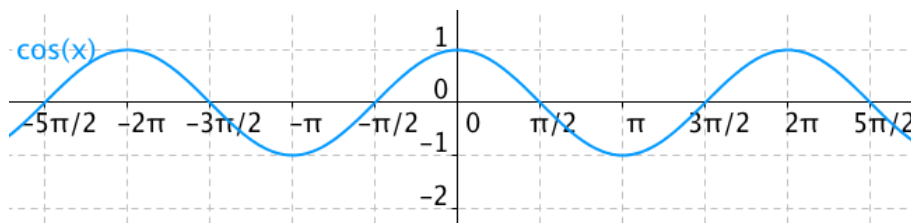
Funkce sinus



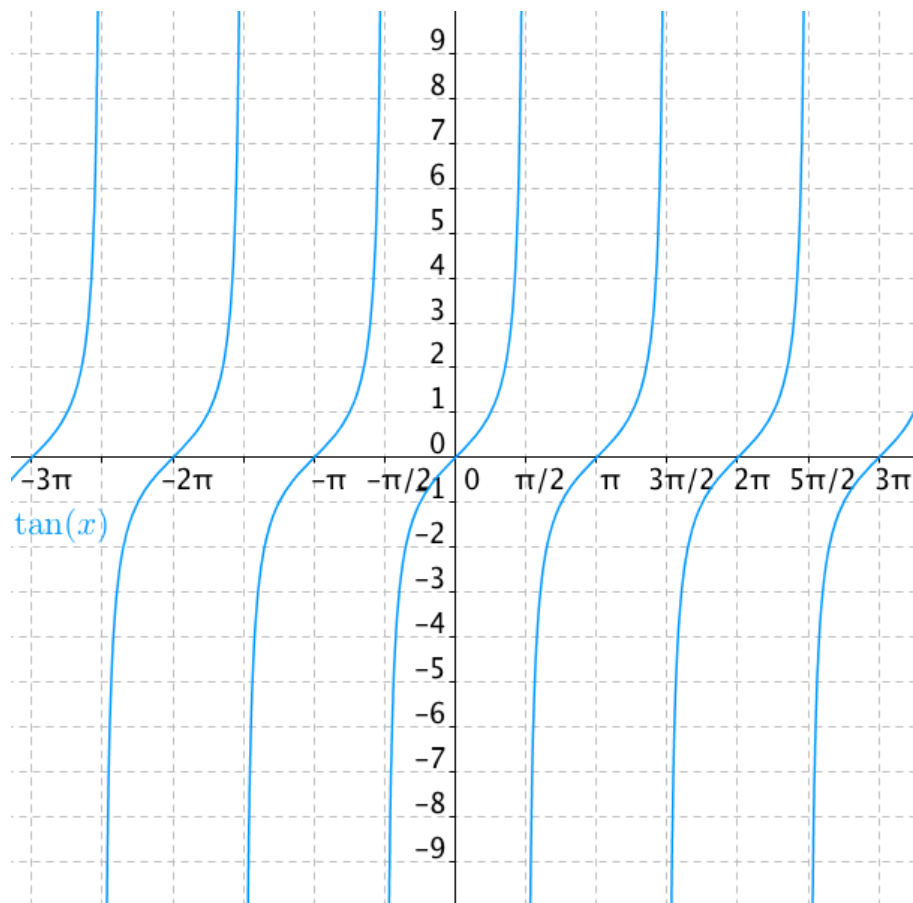
Graf funkce sinus – SINUSOIDA



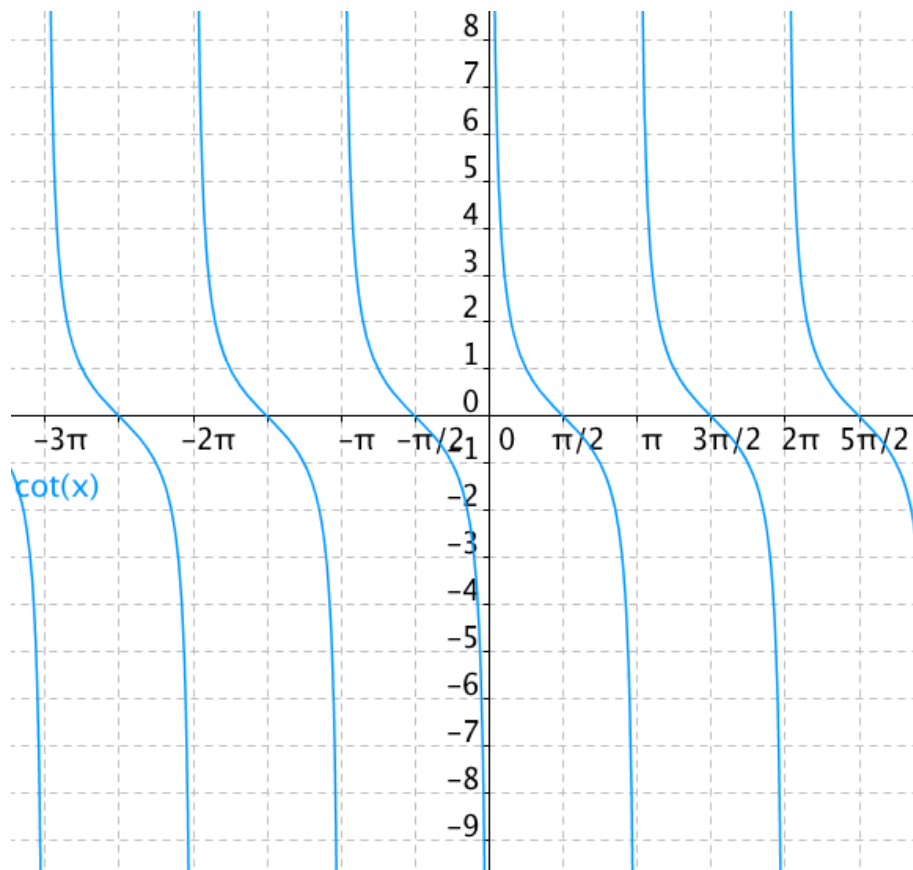
Graf funkce kosinus – KOSINUSOIDA



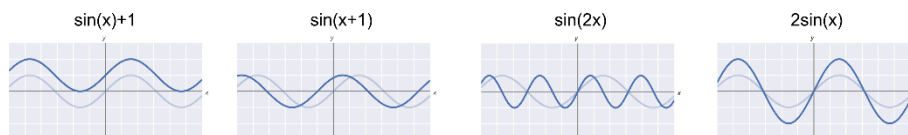
Graf funkcje tangens – TANGENTOIDA



Graf funkcje kotangens – KOTANGENTOIDA



Dopad úprav funkce na graf

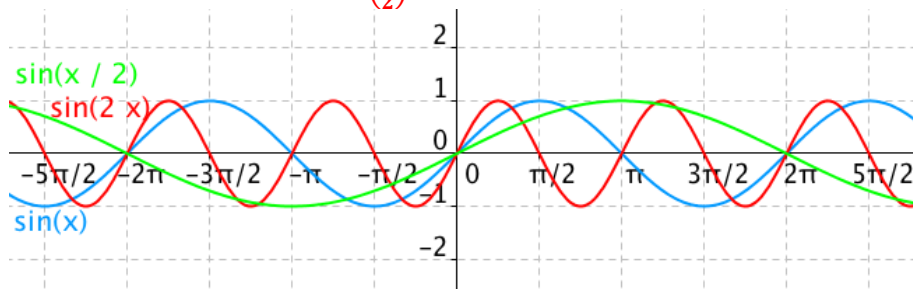


Obrázek ukazuje grafy několika úprav **funkce $\sin(x)$** .

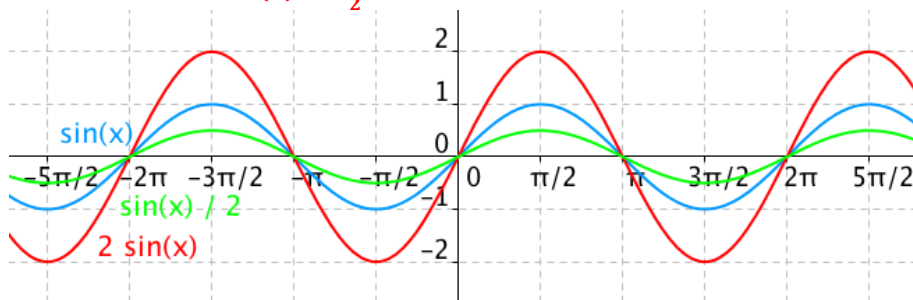
- $\sin(x + 1)$** graf má posunutou **fázi** (posun ve směru **osy x**)
- $\sin(x) + 1$** graf je posunutý ve směru **osy y**
- $\sin(2x)$** funkce má změněnou **délku periody**
- $2 \sin(x)$** funkce má změněnou velikost **amplitudy**

Co se stane, pokud budeme měnit argument funkce sinus?

- Graf funkce **$\sin(2x)$** a **$\sin\left(\frac{x}{2}\right)$**

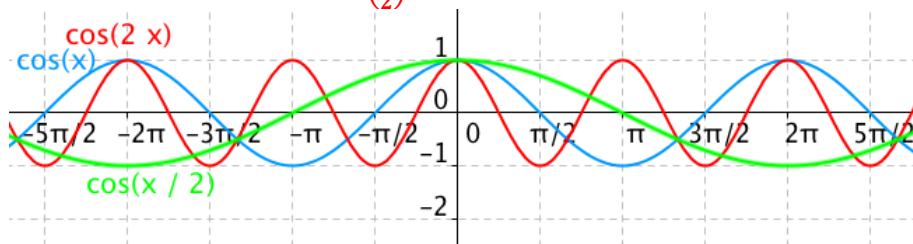


- Graf funkce **$2 \sin(x)$** a **$\frac{\sin(x)}{2}$**

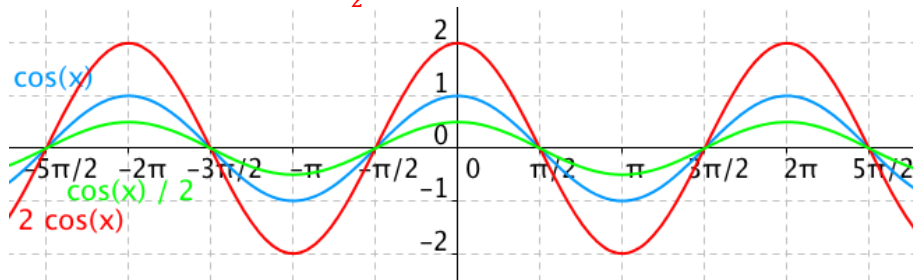


Co se stane, pokud budeme měnit argument funkce cosinus?

- Graf funkce **$\cos(2x)$** a **$\cos\left(\frac{x}{2}\right)$**



- Graf funkce **$2 \cos(x)$** a **$\frac{\cos(x)}{2}$**



Příklady: Načrtněte graf funkce a určete definiční obor a obor hodnot

a) $y = \sin(x) + 1$

b) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$

d) $y = 2 \cdot \cos(x) - 2$

e) $y = \sin(3x)$

f) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

g) $y = 3 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

h) $y = 3 \cdot \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$

Příklady: Nakresli graf goniometrické funkce a urči vlastnosti funkce: (definiční obor funkce, obor hodnot funkce, funkce je/není prostá, je/není spojitá, sudá/lichá funkce, je/není periodická, neohraničená/ohraničená zdola/shora, asymptoty funkce, souřadnice průsečíků se souřadnicovými osami, lokální minimum, lokální maximum, rostoucí/klesající funkce)

p) $y = \sin(x)$

q) $y = \sin(2x)$

r) $y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

s) $y = 2 \sin(x)$

t) $y = \frac{\sin(x)}{2}$

u) $y = -\cos(x) + 1$

v) $y = \cos(-x) + 3$

w) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

x) $y = -\cos(x - \pi)$

y) $y = 2 \sin(2x) + 2$

z) $y = -0,5 \sin(x) - 0,5$

aa) $y = -\sin(-x + 11\pi)$

bb) $y = -\cos\left(x + \frac{3}{2}\pi\right)$

Příklady: Načrtněte graf funkce a určete definiční obor a obor hodnot

a) $y = 3 \cos(x - 1) + 2$

b) $y = \frac{1}{2} \sin(2x + 2) - 1$

c) $y = \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$

Opakování: Nakresli graf goniometrické funkce

a) $y = \sin(3x - \pi)$

b) $y = \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$

FUNKCE TANGENS A KOTANGENS

(zkráceně **tg(x)**, **cotg(x)**)

$f: y = \operatorname{tg} x$ • $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ podmínka $\cos x \neq 0$
 $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi$
 $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi, 2 \in \mathbb{Z} \right\}$

$g: y = \operatorname{cotg} x$ • $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ podmínka $\sin x \neq 0$
 $x \neq 2\pi$
 $D = \mathbb{R} \setminus \{ 2\pi, 2 \in \mathbb{Z} \}$

Tabulka hodnot funkcí:

TABULKA HODNOT FUNKCÍ

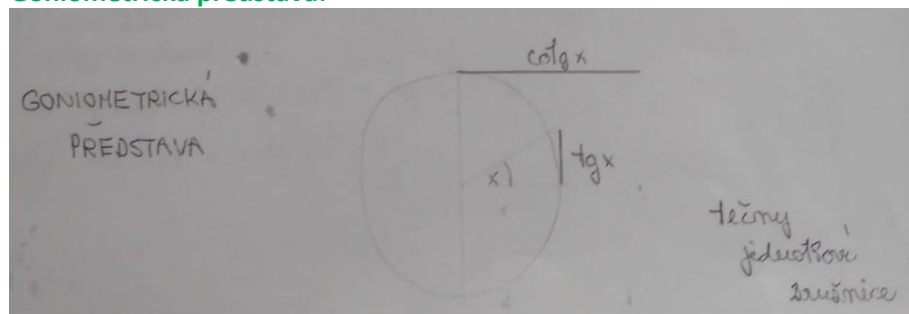
$[rad]$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$[^\circ]$	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ND	0	ND
$\operatorname{cotg} x$	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	ND	0

	I.	II.	III.	IV.
$\operatorname{tg} x$	+	-	+	-
$\operatorname{cotg} x$	+	-	+	-

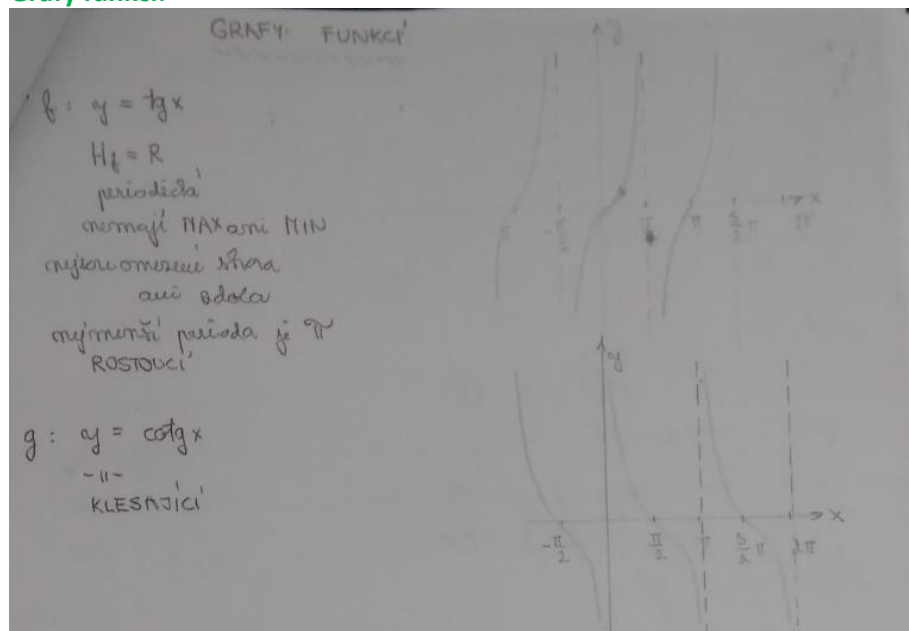
Funkce $\operatorname{tg}(x)$ a $\operatorname{cotg}(x)$ jsou liché

$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$ odvození $\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$
 $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg}(x)$

Goniometrická představa:



Grafy funkcí:



Příklady: Urči hodnoty funkcí $\operatorname{tg}(x)$ a $\operatorname{cotg}(x)$

a) $x = 150^\circ$

b) $x = 225^\circ$

c) $x = 120^\circ$

d) $x = \frac{5}{6}\pi$

e) $x = \frac{13}{2}\pi$

f) $x = \frac{33}{4}\pi$

g) $x = -\frac{19}{6}\pi$

h) $x = 750^\circ$

i) $x = -30^\circ$

Funkce tangens a kotangens:

FUNKCE TANGENS A KOTANGENS								
	I.	II.	III.	IV.		0°	30°	45°
$\operatorname{tg} x$	+	-	+	-	$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
$\operatorname{cotg} x$	+	-	+	-	$\operatorname{cotg} x$	ND	$\sqrt{3}$	1

	60°	90°	180°	270°
$\operatorname{tg} x$	$\sqrt{3}$	ND	0	ND
$\operatorname{cotg} x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	ND	0

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$
 $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$
PERIODA: 2π
ND - není definováno

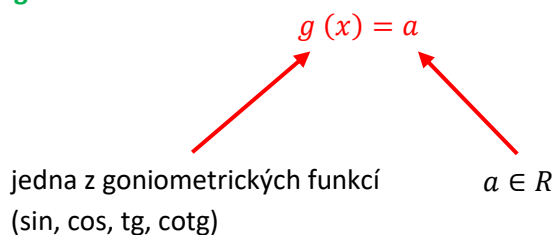
Příklady: Najdi všechna řešení goniometrické rovnice

1) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

2) $\operatorname{cotg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

GONIOMETRICKÉ ROVNICE

Základní goniometrické rovnice:



ZÁKLADNÍ řešení

= množina vše jejích kořenů z intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ nebo $\langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$.

MNOŽINA VŠECH řešení je v R ; vyjádří se jako $\bigcup_{k \in Z}$

Příklad: Najdi základní řešení a poté zapiš množinu všech řešení

- 1) $\sin x = -\frac{1}{2}$
- 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 3) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$
- 4) $\operatorname{cotg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
- 5) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 6) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Příklady na opakování: Řešte v R rovnice a výsledné hodnoty zakreslete na jednotkové kružnici. Najděte základní řešení a poté zapište množinu všech řešení.

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1) $\sin x = 0$ | 12) $\cos x = \frac{1}{2}$ |
| 2) $\sin x = 1$ | 13) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 3) $\sin x = -1$ | 14) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ |
| 4) $\sin x = \frac{1}{2}$ | 15) $\operatorname{tg} x = 1$ |
| 5) $\sin x = -\frac{1}{2}$ | 16) $\operatorname{tg} x = -1$ |
| 6) $\cos x = 0$ | 17) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 7) $\cos x = 1$ | 18) $\operatorname{cotg} x = 1$ |
| 8) $\cos x = -1$ | 19) $\operatorname{cotg} x = -1$ |
| 9) $\operatorname{tg} x = 0$ | 20) $\operatorname{cotg} x = \sqrt{3}$ |
| 10) $\operatorname{cotg} x = 0$ | |
| 11) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | |

DALŠÍ GONIOMETRICKÉ ROVNICE

Řešení substitucí = vždy, když je místo x jiný tvar
(např. $3x, 5x, 3x + \pi, \frac{\pi}{4} - 2x, \dots$)

SUBSTITUTE = nahrazení výrazu novou neznámou

Příklad: Dané rovnice řešte pomocí substituce

- 1) $\cos 3x = \frac{1}{2}$
- 2) $2 \sin(3x + \pi) = -1$
- 3) $\sin 2x = \frac{1}{2}$
- 4) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$
- 5) $\operatorname{tg} 3x = -1$

Příklad: Řešte goniometrické rovnice využitím:

substitute + kvadratické rovnice

$\sin, \cos \in \langle -1; 1 \rangle$

- 1) $2 \sin^2 x - \sin x = 0$
- 2) $2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 = 0$
- 3) $\sin^2 x + 5 \sin x + 4 = 0$
- 4) $4 \cos^2 x + 4 \cos x + 1 = 0$
- 5) $(3 \sin x - 2) - (\sin x - 3)^2 + 11 = 0$

Příklady na opakování: Vyřešte v $\mathbf{R}$ goniometrickou rovnici

- | | |
|--|---|
| 1) $\sin 3x = 0$ | 9) $\sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 2) $\sin 2x = \frac{1}{2}$ | 10) $\cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 3) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ | 11) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ |
| 4) $\cos 6x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 12) $\cos \frac{x}{7} = -1$ |
| 5) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$ | 13) $\operatorname{tg} \frac{x}{3} = 0$ |
| 6) $\operatorname{tg} 3x = -1$ | 14) $\operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3}$ |
| 7) $\sin 3x = 1$ | 15) $\operatorname{tg} 4x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 8) $\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 16) $\operatorname{cotg} 2x = -1$ |

Příklady na opakování: Vyřešte v $\mathbf{R}$ goniometrickou rovnici

- | | |
|--|---|
| 1) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$ | 7) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ |
| 2) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 8) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ |
| 3) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 9) $\cos\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$ |
| 4) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ | |
| 5) $\operatorname{cotg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ | |
| 6) $\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | |

Příklady na opakování: Řešte goniometrické rovnice využitím substituce

- 1) $4 \sin^2 x - 4 \sin x + 1 = 0$
- 2) $(\cos x - 4)(4 \cos x - 3) + 3 = 0$
- 3) $(2 \sin x + 1)(\sin x - 3) + (2 \sin x - 1)(\sin x + 2) = 4 \sin x - 1$
- 4) $2 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x = 2 (\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x) + \sqrt{3}$
- 5) $\operatorname{cotg}^2 x - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{cotg} x = 0$

VZTAHY MEZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI

GONIOMETRICKÉ VZORCE

- 1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $x \in R$
- 2) $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$
- 3) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- 4) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- 5) $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- 6) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$ $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in Z$

SOUČTOVÉ VZORCE

- 1) $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
- 2) $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$
- 3) $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
- 4) $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

Příklad: Řešte rovnici s využitím goniometrických vzorců

- 1) $2 \cos^2 x = \sin x + 1$ v rovnici je $\sin x$ i $\cos x$
pomocí vzorce upravím na rovnici
s jednou goniometrickou funkcí
 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
- 2) $\cos x - 1 = \sin^2 x$
- 3) $3 \cos^2 x = \sin^2 x$
- 4) $\cos 2x - \sin x = 0$
- 5) $3 \cos x = 2 \sin^2 x$

Příklady: na součtové vzorce

- 1) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) =$
- 2) $\sin(\pi - x) =$
- 3) $-\sin(2\pi - x) =$
- 4) $\cos(x + \pi) =$
- 5) $\sin(x - \pi) =$

Příklad: Vyřešte goniometrickou rovnici na součtové vzorce

- 1) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin x = 1$
- 2) $\sin^2 x - \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 2$
- 3) $\cos(2\pi + x) + \cos x = -1$
- 4) $\sin x - \sin(x + \pi) = \sqrt{3}$
- 5) $\cos^2 x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$

Příklad na opakování: Řešte rovnice s využitím goniometrických vzorců

- 1) $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$
- 2) $2 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{cotg} x = 1$
- 3) $\operatorname{tg} x (\sin x - 1) = \frac{1}{2 \cos x} - \cos x$
- 4) $\sin 3x = \cos 3x$
- 5) $\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} + 4 \operatorname{cotg} x = 0$
- 6) $2 + \cos 2x = -5 \sin x$
- 7) $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$
- 8) $2 \cos^2 x = \sin^2 x - 1$
- 9) $6 \sin^2 x - 7 \cos x - 1 = 0$
- 10) $3 \sin x = 2 \cos^2 x$
- 11) $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$
- 12) $2\sqrt{3} \sin^2 x = \cos x$
- 13) $\sin x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$
- 14) $3 \cos^2 x - 4 \cos x - \sin^2 x - 2 = 0$
- 15) $3 \cos x = 2 \sin^2 x$
- 16) $\cos 2x + \sin x = 0$

Další příklady na součtové vzorce: Zjednodušte

- 1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$
- 2) $\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) =$
- 3) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) =$
- 4) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) =$
- 5) $\sin(x + 2\pi) =$
- 6) $\cos(4\pi - x) =$
- 7) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) =$
- 8) $\cos(\pi - x) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) =$