

EXPONENCIÁLNÍ A LOGARITMICKÉ FUNKCE, LOGARITMUS

Použití ve fyzice, chemii, biologii, atd.

(radioaktivní přeměna, zákon absorpce záření, ...)

Pokud se při nějakém ději změní množství o stále stejnou část aktuálního množství, jde o exponenciální závislost.

<https://www.geogebra.org/calculator>

1) EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

V množině R je vyjádřena tvarem

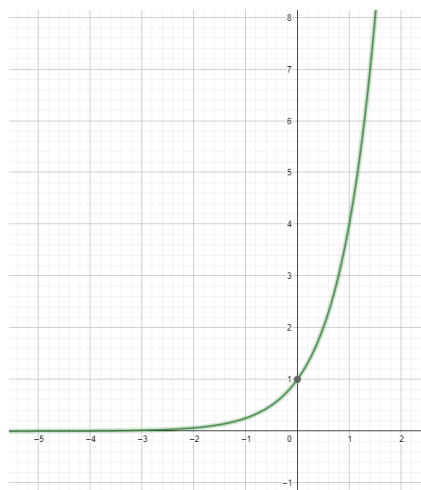
$$\text{funkce } y = a^x; \quad a \in R^+ \setminus \{1\} \\ x \in R$$

(kladné číslo různé od nuly; $y = 1$ = šlo by o konstantní funkci)

$$a > 1$$

$$a \in (1; \infty)$$

např. $f: y = 4^x$

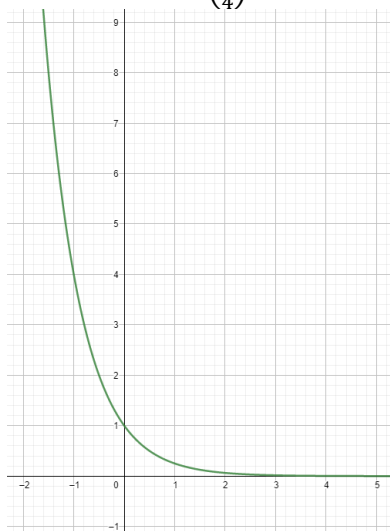


ROSTOUCÍ

$$0 < a < 1$$

$$a \in (0; 1)$$

např. $g: y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ $y = 4^{-x}$



KLESAJÍCÍ

$$D_{(f)} = R$$

$$H_{(f)} = (0; \infty)$$

je PROSTÁ

zdola omezená

nemá MAX ani MIN

není sudá ani lichá

grafem je **EXPONENCIÁLA** (exponenciální křivka spojitá v $(0; \infty)$)

funkční hodnota v bodě **0** je rovna **1**

Příklady: Načrtni graf funkce a urči D , H , název křivky a vlastnosti

1) $f: y = 2^x$

2) $g: y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

3) $f: y = 5^x$

4) $h: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

5) $f: y = 7^x$

6) $g: y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

7) $f: y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$

2) LOGARITMICKÉ FUNKCE

Logaritmická funkce je **INVERZNÍ** k exponenciální funkci $y = a^x$.

$$(x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x) \quad \text{„právě když“}$$

Funkci zapisují $y = \log_a x$; $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

„logaritmus x o základu a “

$$x \in (0; \infty)$$

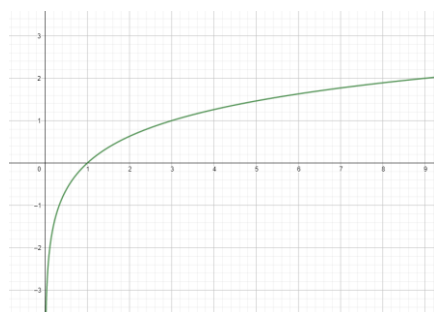
„logaritmus o základu a čísla x “

y je takové číslo, na které musím umocnit základ a abych získal číslo x

$$a > 1$$

$$a \in (1; \infty)$$

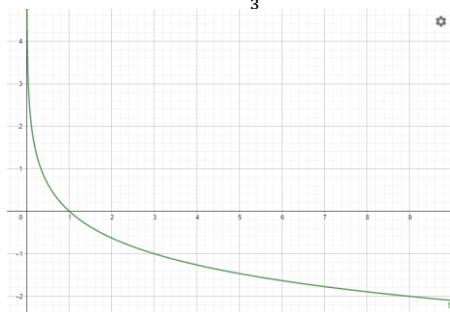
např. $f: y = \log_3 x$



$$0 < a < 1$$

$$a \in (0; 1)$$

např. $g: y = \log_{\frac{1}{3}} x$



ROSTOUCÍ

KLESAJÍCÍ

$$D_{(f)} = (0; \infty)$$

$$H_{(f)} = \mathbb{R}$$

není shora ani zdola omezená

nemá MAX ani MIN

je PROSTÁ

není sudá ani lichá

grafem je **LOGARITMICKÁ KŘIVKA**

funkční hodnota v bodě **1** je rovna **0**

funkční hodnoty se nazývají **LOGARITMY**

Důležitý vzorec: $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$
 $x = a^{\log_a x}$

Příklady: Načrtni graf funkce a urči D, H , název křivky a vlastnosti

1) $f: y = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x$

2) $g: y = \log_2 x$

3) $h: y = \log_5 x$

4) $f: y = \log_{\left(\frac{1}{6}\right)} x$

5) $f: y = \log_{10} x$

6) $g: y = \log_{\left(\frac{2}{3}\right)} x$

7) $f: y = \log_{\left(\frac{3}{2}\right)} x$

8) $h: y = \log_{\left(\frac{5}{3}\right)} x$

POROVNÁNÍ GRAFŮ INVERZNÍ FUNKCE

EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

$$f: y = a^x$$

$$D_{(f)} = R \quad D_{f^{-1}} = (0; \infty)$$

$$H_{(f)} = (0; \infty) \quad H_{f^{-1}} = R$$

LOGARITMICKÁ FUNKCE

$$f^{-1}: x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x$$

Rostoucí funkce:

a) $f: y = 3^x$

$$f^{-1}: y = \log_3 x$$

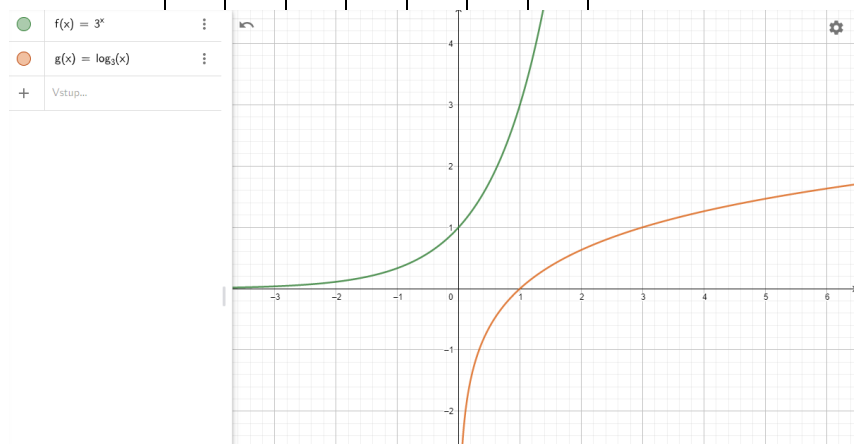
Postup a výsledek:

f :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	81

f^{-1} :

x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	81
y	-3	-2	-1	0	1	2	3	4



Klesající funkce:

b) $g: y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$$g^{-1}: y = \log_{\frac{1}{4}} x$$

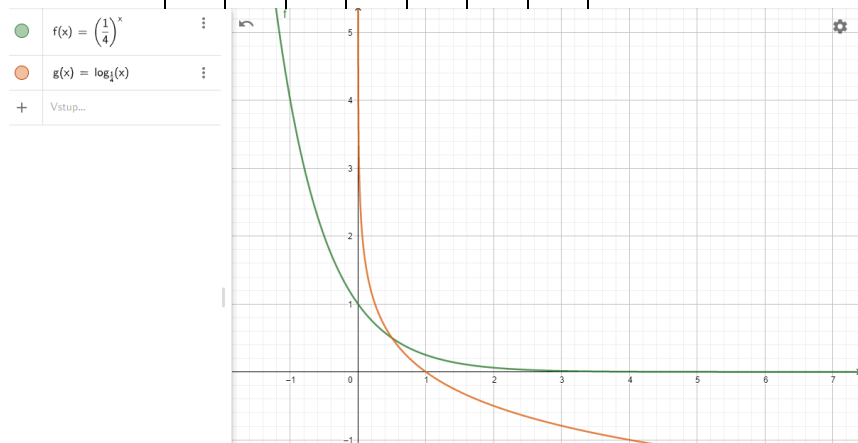
Postup a výsledek:

g :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	256	64	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$

g^{-1} :

x	256	64	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3



PŘÍKLADY NA EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

Příklady na výroky: Rozhodni, zda je pravdivý výrok (a zdůvodni)

1) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 < \left(\frac{1}{4}\right)^5$

2) $\left(\frac{6}{7}\right)^2 > \left(\frac{6}{7}\right)^4$

3) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-2} < \left(\frac{7}{3}\right)^3$

4) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 < 1$

5) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} > \left(\frac{2}{7}\right)^3$

6) $\left(\frac{8}{5}\right)^{-3} > \left(\frac{8}{5}\right)^2$

7) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-0,5} < 1$

DRUHÝ LOGARITMICKÝCH FUNKCÍ

a) **DEKADICKÝ** logaritmus $f: y = \log_{10} x \rightarrow y = \log x$
(zkrácený zápis)

b) **PŘIROZENÝ** logaritmus $g: y = \log_e x \rightarrow y = \ln x$

Eulerovo číslo $e = 2,718281 \dots$ iracionální číslo, pomocí e se popisují jevy ve fyzice, chemii, biologii atd.

PAMATUJ!

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

Příklady na výroky: Rozhodni, které výroky jsou pravdivé

1) $\log_4 7 < \log_4 9$

2) $\log_{0,5} 4 \leq \log_{0,5} 8$

3) $\log_{10} 12 \leq \log_{0,3} 12$

4) $\log_8 5 > \log_8 14$

5) $\log_{0,2} 6 < \log_{0,2} 2$

6) $\log_5 3 > \log_{0,1} 3$

DEFINIČNÍ OBORY LOGARITMICKÝCH FUNKCÍ

$$D = (0; \infty)$$

Příklady:

1) $y = \log_{10}(x + 3)$

2) $y = \log_{0,5}(-x)$

3) $y = \log_5 \sqrt{x - 4}$

4) $y = \log_{0,5}(8 - x)$

5) $y = \log_5 \sqrt{3 - x}$

6) $y = \log_{0,5}(-x - 1)$

7) $y = \log_5 \sqrt{x + 5}$

EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE A NEROVNICE

Neznámá $x \in R$ se vyskytuje v exponentu nějaké mocniny.

„Pro všechna reálná čísla x, y a pro kladné reálné číslo a různé od jedné platí:

$$a^x = a^y \Rightarrow x = y \quad \begin{array}{l} x, y \in R \\ a \in R^+ \setminus \{1\} \end{array}$$

POSTUP: Rovnice převedeme na společný základ a poté porovnáme exponenty (různé základy řešíme logaritmováním).

Použijí: **vytýkání**
substituci

PAMATOVAT: (pravidla pro mocniny)

- $(\text{cokoliv})^0 = 1$
- $1^{(\text{na cokoliv})} = 1$
- $a^1 = a$
- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- $a^r : a^s = a^{r-s}, a \neq 0$
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
- $(ab)^r = a^r b^r$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n : b^n, b \neq 0$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, a \neq 0, b \neq 0$
- $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}, b \neq 0$
- $a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}, a > 0, r \in Z, s \in N$

Příklady:

- 1) $2^{x+1} = 4$
- 2) $3^{2x-1} = 27$
- 3) $3^{3x-1} = 1$
- 4) $25^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2}$
- 5) $\frac{1}{5^{2x-4}} = 125$
- 6) $(\sqrt{5})^{3x-2} = 5^{x-4}$
- 7) ${}^{x+2}\sqrt{8} = {}^{x+1}\sqrt{4}$

Příklady: Uprav exponenciální rovnici pomocí vytýkání

- 1) $2^v + 2^{v+1} = 24$
- 2) $3^{x+2} - 3^x - 24 = 0$
- 3) $3^x = \frac{1}{81}$
- 4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-5} = \left(\frac{5}{3}\right)^3$
- 5) $3^{v-1} + 3^{v-2} + 3^{v-3} = 13$

Příklady: Uprav exponenciální rovnici pomocí vytýkání (velká čísla)

- 1) $7^{x+2} + 2 \cdot 7^{x-1} = 345$
- 2) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$

Další příklady:

- 1) $3^z = 9$
- 2) $4^z = 64$
- 3) $3^{-z} = 27$
- 4) $25^z = \frac{1}{25}$
- 5) $2^z = 0,5$
- 6) $0,25^z = 16$
- 7) $6^{-z} = \frac{1}{36}$
- 8) $(\sqrt{3})^z = \frac{1}{9}$
- 9) $4^{2z} = 256$
- 10) $4^{v+1} = 1$
- 11) $0,7^{5+4v} = 1$
- 12) $3^{v^2-5v+6} = 1$
- 13) $10^{x-1} = 1$
- 14) $10^{x-2} = 0,1$
- 15) $2^u \cdot 3^u = 216$
- 16) $0,8^{x+4} = 0,8^{6-2x}$
- 17) $4^{\frac{1-x}{1+x}} = 4^{\frac{1}{3}}$
- 18) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$
- 19) $3^{x+1} - 3^x = 162$
- 20) $4^{x+1} - 8 \cdot 4^{x-1} = 32$
- 21) $4 \cdot 3^{x+1} - 3^{x+2} - 3^{x-1} = 72$
- 22) $3^{x+2} + 3^{x+1} + 2 \cdot 3^x = 126$
- 23) $9^{x+2} + 5 \cdot 9^{x+1} = 14$
- 24) $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$

EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE ŘEŠENÉ POMOCÍ SUBSTITUCE

Substituce = určitý výraz nahradím novou neznámou

V každé rovnici, nerovnici nebo soustavě je to jinak, rozhodují se podle konkrétního příkladu.

Příklady:

- 1) $4^x + 2^x - 6 = 0$
- 2) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$
- 3) $* 4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$
- 4) $5^{x+1} + 25^x = 50$
- 5) $3^x + 27^x + 7 \cdot 9^x = 3^x$
- 6) $2 \cdot 4^x - 2^{x+3} + 8^x = 0$
- 7) $49^x + 14 \cdot 7^{x-1} = 3$
- 8) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 108$
- 9) $8 \cdot 4^{x-1} + 2^{x+3} = 2^{2x}$

PŘÍKLADY NA LOGARITMY

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

Příklady: Urči hodnotu funkce y

- 1) $y = \log_2 8$
- 2) $y = \log_3 81$
- 3) $y = \log_{\frac{1}{2}} 16$
- 4) $y = \log_{\frac{1}{3}} 27$
- 5) $y = \log_{10} 0,01$
- 6) $y = \log_{\frac{1}{8}} 64$
- 7) $\log_7 49 = y$
- 8) $\log_9 \sqrt{3} = y$
- 9) $y = \log_2 0,5$
- 10) $y = \log 10^5$
- 11) $y = \log \sqrt{10}$
- 12) $y = \log (10^{-3})$

Příklady: Urči všechna x , pro která platí:

- 1) $\log_7 x = 2$
- 2) $\log_8 x = 3$
- 3) $\log_2 x = 0$
- 4) $\log_5 x = -3$
- 5) $* \log_5 x = -\frac{1}{3}$
- 6) $\log_4 x = 5$
- 7) $\log_9 x = \frac{1}{2}$
- 8) $\log_{\frac{1}{6}} x = -2$
- 9) $4 = \log_{\frac{2}{3}} x$
- 10) $* \log_{\frac{1}{32}} x = -\frac{1}{5}$

Příklady: Urči všechna $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, pro která platí:

- 1) $\log_a 100 = 2$
- 2) $\log_a 16 = 2$
- 3) $\log_a 125 = 3$
- 4) $\log_a 4 = 2$
- 5) $\log_a 25 = 2$
- 6) $* \log_a 0,0001 = -2$
- 7) $\log_a 81 = 4$
- 8) $\log_a 7 = -1$
- 9) $3 = \log_a 1000$
- 10) $* \log_a 3 = \frac{1}{2}$
- 11) $\log_a \frac{1}{64} = -6$

VĚTY O LOGARITMECH

(použití pouze při stejném základu)

$$a \in R^+ \setminus \{1\}, r, s \in R^+$$

1) $\log_a(r \cdot s) = \log_a r + \log_a s$ logaritmus součinu
např. $\log 5x = \log 5 + \log x$

2) $\log_a\left(\frac{r}{s}\right) = \log_a r - \log_a s$ logaritmus podílu
např. $\log \frac{5}{3} = \log 5 - \log 3$

3) $\log_a r^s = s \cdot \log_a r$ logaritmus mocniny =
např. $\log x^5 = 5 \cdot \log x$ součin mocnitele a logaritmu
základu mocniny

ÚPRAVY

LOGARITMOVÁNÍ: $a^y = x$ na tvar $y = \log_a x$
ODLOGARITMOVÁNÍ: $y = \log_a x$ na tvar $a^y = x$

Příklady:

- 1) $\log_5 10 + \log_5 12,5 =$
- 2) $\log 1500 - \log 15 =$
- 3) $\log_2 8 - 4 \cdot \log_2 2 + \log_2 32 =$
- 4) $* \log \frac{5x^3}{2y^4} =$
- 5) $\log_4 16^{-0,5} =$
- 6) $\log_2 8 + \log_2 16 =$
- 7) $\log_3 486 - \log_3 2 =$
- 8) $\log_6 216^{-1} =$
- 9) $\log_7 6 - \log_7 3 + \log_7 686 - \log_7 4 =$
- 10) $\log_2 64^3 + 5 =$

LOGARITMICKÉ ROVNICE

- Využít věty o logaritmech
- Nová věta:

$$\text{Jestliže } \log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y \quad (x, y \in R^+)$$

(každou stranu upravím na logaritmus jednoho základu a pak odlogaritmuji)

$$\log_a(\text{výraz 1}) = \log_a(\text{výraz 2})$$
$$\text{výraz 1} = \text{výraz 2}$$

Příklady:

NEZAPOMÍNAT NA PODMÍNKY $x \in (0; \infty)$

- 1) $\log_2 8 = \log_2 x$
- 2) $\log_5(2x - 1) = \log_5(x + 3)$
- 3) $\log_3(x + 5) = \log_3(2x - 1)$
- 4) $\log_{0,5} x + \log_{0,5}(x + 3) = 2 \cdot \log_{0,5} 2$
- 5) $* \log_5(x^2 - 17) = \log_5(x + 3)$
- 6) $\log_4(x - 3) = \log_4(5 - x)$
- 7) $\log_{\frac{1}{3}}(6x - 5) = \log_{\frac{1}{3}}(5x + 7)$
- 8) $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = \log_2(5 - x)$
- 9) $\log_8(x^2 + 4x) - \log_8 x = \log_8 11$
- 10) $3 \cdot \log_7 2x - \log_7 x^2 = \log_7(9 - x)$

LOGARITMOVÁNÍ

= číslo v rovnici nahradím logaritmem

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Rightarrow f(x) \cdot \log_c a = g(x) \cdot \log_c b \quad x \in R, a, b, c \in R^+ \setminus \{1\}$$

Příklady:

- 1) $\log_{10} x = 2 - \log_{10} 5$
- 2) $\log_4(5x - 4) = 2$
- 3) $\log_2(x + 14) + \log_2(x + 2) = 6$
- 4) $\log(x + 3) - \log 2 = 1 - \log(x + 2)$
- 5) $\log_3(x - 7) = 1$
- 6) $\log_5(x - 2) = 0$

Příklady: Řešení exponenciálních rovnic pomocí logaritmování

http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/miroslav_rezac/4c_exporce_log.php

- 1) $* 2^x = 9$
- 2) $* 7^y = 13^{y-1}$
- 3) $* 5^{x+2} = 8$
- 4) $* 3^x = 16^{x+1}$
- 5) $* 2^x \cdot 3^{x-1} = 4^{x+1}$
- 6) $* 3 \cdot 7^y - 7^{y-1} = 60$
- 7) $* 0,3^x = 5$
- 8) $* \left(\frac{1}{2}\right)^x = 3$
- 9) $* 4^{x+2} = 5$
- 10) $* 4^x \cdot 3^x = 14^{x-1}$