

INVERZNÍ FUNKCE

(pouze u prosté funkce)

Funkci inverzní určujeme vždy k nějaké **původní funkci** f . Nutná podmínka pro existenci inverzní funkce je, aby **původní funkce** f byla **prostá**. Původní funkce f zobrazuje prvky $D_{(f)}$ na množinu $H_{(f)}$ a **inverzní funkce**, kterou **značíme** f^{-1} , zobrazuje prvky $H_{(f)}$ na množinu $D_{(f)}$. Graficky si to lze představit tak, jako bychom k původnímu grafu funkce sestrojili jeho obraz v **osové souměrnosti podle osy** $y = x$. **Předpis inverzní funkce** získáme tak, že se pokusíme vyjádřit x jako funkci argumentu y .

Co znamená slovo „inverzní“? Převrácená nebo také „obrácená“. (Například inverze u počasí znamená, že ve vyšších polohách je vyšší teplota. Normální stav je obrácený.)

Co znamená slovo „prostá funkce“? Prostá funkce je funkce, která je buď jen rostoucí nebo jen klesající.

Video: Isibalo: https://www.youtube.com/watch?v=DL_NhOfEMM

Inverzní funkce k **PROSTÉ funkci** f je funkce f^{-1} , pro kterou platí:

$$1) D_{f^{-1}} = H_f$$

$$2) \text{ každému } y \in D_{f^{-1}} \text{ je přiřazeno právě to } x \in D, \text{ pro které je } f(x) = y$$

čili platí: 1) $D_{f^{-1}} = H_f$

$$2) H_{f^{-1}} = D_f$$

Grafy funkcí f^{-1} a f jsou sestrojené v téže soustavě souřadnic, O_{xy} a jsou osově souměrné podle přímky $y = x$ (osa I. a III. kvadrantu).

Postup:

- Předpis inverzní funkce zjistíme tak, když v předpisu původní funkce zaměníme x s y a opět vyjádříme y .
- Pro některé funkce neexistuje inverzní funkce (nejsou prosté) na jejich celém $D_{(f)}$. Když však tento $D_{(f)}$ omezíme, můžeme již k této funkci nalézt inverzní.

Příklad: Urči inverzní funkci a její D, H :

$$1) f: y = 3x - 2 ; \quad x \in \langle -1; 2 \rangle$$

$$2) m: y = 2x - 0,5 ; \quad x \in \langle -2; 3 \rangle$$

Příklady: Urči inverzní funkci a obě funkce zakresli do jednoho grafu:

$$1) f: y = 2x$$

$$2) f: y = \frac{x}{4}$$

$$3) f: y = 4x - 7$$

$$4) f: y = 2x - 1$$

$$5) f: y = \frac{x}{3} - 1$$

$$6) f: y = \frac{1}{x} + 1$$

$$7) f: y = 2x + 1$$

$$8) f: y = \frac{x}{2} + 3; D_{(f)} = \langle -6; 2 \rangle$$

$$9) * f: y = x^2; D_{(f)} = \langle 0; \infty \rangle$$

$$10) * f: y = 2x^2; D_{(f)} = \langle 0; \infty \rangle$$

$$11) * f: y = x^2 + 3; D_{(f)} = \langle 0; \infty \rangle$$

Příklady: Najdi inverzní funkci k dané funkci a urči definiční obor obou funkcí:

1) $f: y = \frac{x}{5}$

2) $f: y = 1 - [4x - 7 - (1 - 2x) + 3] - x$

3) $* f: y = \frac{2x+3}{3x+5}$

4) $* f: y = \frac{x-1}{6x+3}$

5) $* f: y = 1 - \frac{1}{2x}$

6) $* f: y = \frac{-x-7}{x+5}$

7) $* f: y = \frac{9-3x}{9x-3}$

8) $* f: y = \frac{10x-5}{15-10x} + 1$

9) $* f: y = \frac{1-[10-(7-x)+20]-5x}{1+2x-(3-4x)} - 2$

Příklady: Urči inverzní funkci k exponenciální nebo logaritmické funkci:

1) $* f: y = e^x$

2) $* f: y = \ln(2 - 3x)$

3) $* f: y = 2^x$

4) $* f: y = \left(\frac{1}{8}\right)^{1-x}$

5) $* f: y = -3,5^x + 6$

6) $* f: y = 1 + \log x$

7) $* f: y = -2 \cdot \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5$

8) $* f: y = \log x - \log 2x + \log 3x$

POROVNÁNÍ GRAFŮ INVERZNÍ FUNKCE

EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

$$f: y = a^x$$

$$D_{(f)} = R \quad D_{f^{-1}} = (0; \infty)$$

$$H_{(f)} = (0; \infty) \quad H_{f^{-1}} = R$$

LOGARITMICKÁ FUNKCE

$$f^{-1}: x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x$$

Rostoucí funkce:

a) $f: y = 3^x$

$$f^{-1}: y = \log_3 x$$

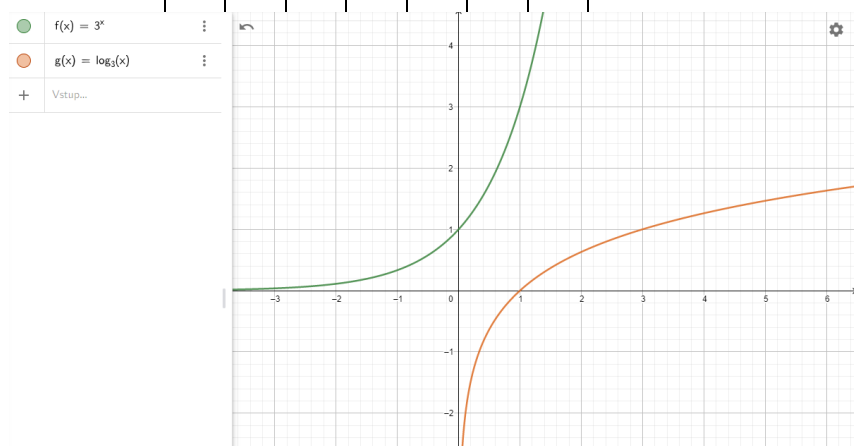
Postup a výsledek:

f :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	81

f^{-1} :

x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	81
y	-3	-2	-1	0	1	2	3	4



Klesající funkce:

b) $g: y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$$g^{-1}: y = \log_{\frac{1}{4}} x$$

Postup a výsledek:

g :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	256	64	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$

g^{-1} :

x	256	64	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3

