Analytická geometrie – SOUŘADNICE

(učebnice Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie; PROMETHEUS)

Denně potřebujeme udat polohu – obchodu, svého bydliště, místa schůzky apod. Způsob běžně používaný (udání ulice a čísla domu) se ovšem nehodí třeba pro šachistu. Ten udává místo na šachovnici písmenem a číslem. Přitom pro sloupce na šachovnici označeny písmeny a řady čísly. Je-li třeba udat polohu např. jezdce na šachovnici a tento jezdec stojí ve čtvrté čadě a sloupci označeném písmenem *c*, napíše se *Jc4*.

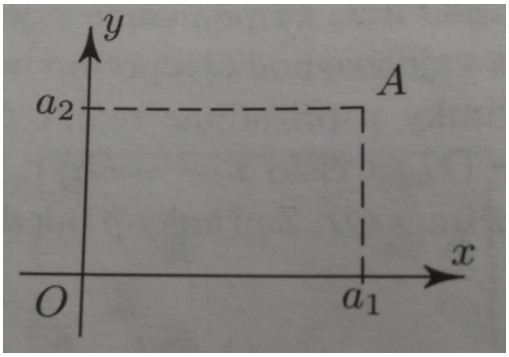
Problémy s udáním své polohy má též mořeplavec, protože na moři nejsou žádná města ani ulice. Ten svou polohu určí dvěma čísly – zeměpisnou délkou a zeměpisnou šířkou.

Podobně budeme postupovat také my – body v rovině určíme dvěma čísly, body v prostoru třemi čísly. Potom budeme moci řešení geometrických úloh provádět početně, což umožní také jejich řešení pomocí počítače.

Souřadnice v rovině (strana 9)

Definice: *Dvojice číselných os x, y v rovině, pro které platí*
1. obě osy jsou navzájem kolmé,
2. jejich průsečíku O odpovídá na obou osách číslo 0,
*se nazývá **kartézská soustava souřadnic v rovině** a označuje se Oxy. Bod O se nazývá **počátek kartézské soustavy souřadnic** a přímky x, y se nazývají **souřadnicové body**.*

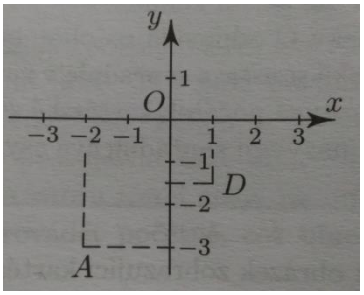
Čísla a_1, a_2 se nazývají **souřadnice bodu A** v kartézské soustavě souřadnic Oxy.



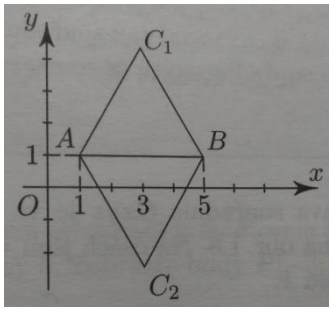
Příklad 1: Zvolte kartézskou soustavu souřadnic Oxy a zobrazte v ní body $A[-2;-3], D\left[1;-\frac{3}{2}\right]$.

Příklad 2: Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC. Jsou dány body $A[1;1], B[5;1]$. Určete souřadnice bodu C výpočtem i měřením. (strana 11)

Výsledek 1:



Výsledek 2:



Příklady: (strana 11)

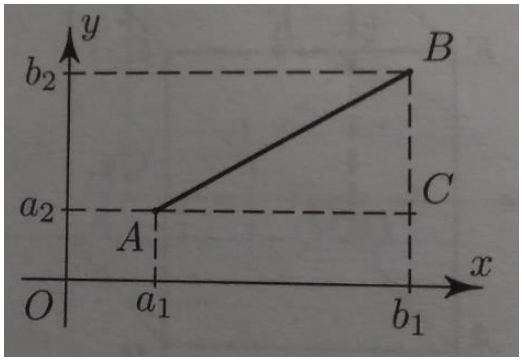
3) Zvolte kartézskou soustavu souřadnic a zobrazte v ní body: $A[3;1], B[1;-2], C[-5;-3]$.

4) Sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ tak, aby střed kružnice opsané byl v počátku O kartézské soustavy souřadnic, aby první vrchol byl bod $A[5;0]$ a aby pro bod $B[b_1;b_2]$ platilo $b_2 > 0$. Určete souřadnice všech vrcholů šestiúhelníku a) výpočtem, b) měřením.

5) Sestrojte středy P, Q, R úseček AB, BC, AC z úlohy 3. Měřením zjistěte souřadnice bodů P, Q, R. Vyslovte hypotézu o tom, jak se vypočítají souřadnice středu úsečky ze souřadnic jejích krajních bodů.

Vzdálenost bodů (strana 14)

Pomocí souřadnic bodů můžeme vypočítat jejich vzdálenost. Výpočet ukážeme nejdříve v rovině. Body $A[a_1;a_2], B[b_1;b_2]$ doplníme bodem C na pravoúhlý trojúhelník ABC o přeponě AB tak, aby jeho odvěsny byly rovnoběžné se souřadnicovými osami.



Jaké souřadnice má bod C?

Vidíme, že pro bod $C[b_1;a_2]$ platí

$$|AC| = |b_1 - a_1|, \qquad |BC| = |b_2 - a_2|.$$

Z Pythagorovy věty dostáváme:

Vzdálenost dvou bodů $A[a_1;a_2], B[b_1;b_2]$ v rovině

$$|\boldsymbol{AB}| = \sqrt{(\boldsymbol{b_1 - a_1})^2 + (\boldsymbol{b_2 - a_2})^2}.$$

Příklad 1: Vypočítejte vzdálenost bodů $K[5;7]$ a $L[2;11]$. (strana 15) **5**

Příklad 2: Jsou dány $A[1;3], B[-1;x]$. Určete číslo x tak, aby $|AB| = \sqrt{5}$. (strana 15) **$x_1 = 4; x_2 = 2$**

Příklad 3: Vypočítejte vzdálenost bodů A, B, je-li dáno:

a) $A[1;2], B[3;5]$ **$\sqrt{13}$**

b) $A[4;3], B[8;4]$ **$\sqrt{17}$**

c) $A[5;2], B[3;6]$ **$\sqrt{20}$**

d) $A[7;2], B[3;2]$ **4**

e) $A[4;9], B[5;5]$ **$\sqrt{17}$**

f) $A[8;-1], B[3;1]$ **$\sqrt{29}$**

g) $A[2;-5], B[-4;3]$ **10**

h) $A[6;4], B[2;9]$ **$\sqrt{41}$**

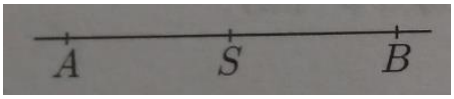
i) $A[-1;0], B[-3;7]$ **$\sqrt{65}$**

j) $A[11;6], B[8;9]$ **$\sqrt{18}$**

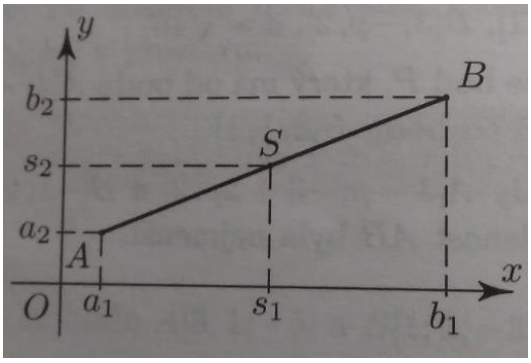
k) $A[-3;-4], B[5;2]$ **10**

Střed úsečky (strana 17-19)

Víme, že střed úsečky je charakterizován tím, že dělí úsečku na dvě stejné části.



Máme-li úsečku AB na číselné ose a bodům A a B odpovídají čísla a, b, potom jejímu středu S odpovídá číslo $s = \frac{a+b}{2}$.



Pro střed $S[s_1; s_2]$ úsečky AB, kde $A[a_1; a_2], B[b_1; b_2]$, platí

$$\boldsymbol{s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}}, \qquad \boldsymbol{s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}}.$$

Příklady:

1) Jsou dány body $A[4; 3]$ a $S[1; 2]$. Určete bod B tak, aby bod S byl střed úsečky AB. $\boldsymbol{B[-2; 1]}$

2) Jsou dány body A, B. Vypočítejte souřadnice středu S úsečky AB.
   a) $A[5; 1], B[1; 3]$ $\boldsymbol{S[3; 2]}$
   b) $A[7; 4], B[3; 8]$ $\boldsymbol{S[5; 6]}$
   c) $A[9; 6], B[5; 7]$ $\boldsymbol{S[7; 6, 5]}$
   d) $A[14; 18], B[6; 2]$ $\boldsymbol{S[10; 10]}$
   e) $A[-5; 2], B[3; 7]$ $\boldsymbol{S[-1; 4, 5]}$
   f) $A[4; -1], B[-3; 5]$ $\boldsymbol{S[0, 5; 2]}$
   g) $A[0; 9], B[-6; 7]$ $\boldsymbol{S[-3; 8]}$
   h) $A[3; -8], B[7; 4]$ $\boldsymbol{S[5; -2]}$

3) Jsou dány body B, S. Vypočítejte souřadnice bodu A tak, aby bod S byl střed úsečky AB.
   a) $B[5; 8], S[4; 5]$ $\boldsymbol{A[3; 2]}$
   b) $B[1; 4], S[5; 6]$ $\boldsymbol{A[9; 8]}$
   c) $B[-3; 7], S[-1; 4]$ $\boldsymbol{A[1; 1]}$
   d) $B[2; 6], S[7; 1]$ $\boldsymbol{A[12; -4]}$
   e) $B[4; -5], S[2; 3]$ $\boldsymbol{A[0; 11]}$
   f) $B[9; 3], S[4; 8]$ $\boldsymbol{A[-1; 13]}$

Příklad: Vypočítejte délku těžnice na stranu *a* v trojúhelníku *ABC*, kde:

$A = [2, 4]$
$B = [3, 2]$
$C = [-1, -6]$

$\boldsymbol{S_{BC}[1; -2]}$
$\boldsymbol{|AS_{BC}| = \sqrt{37}}$