KVADRATICKÁ FUNKCE

Funkční předpis: $\boldsymbol{f: y = ax^2 + bx + c}$ $a \in R \setminus \{0\}$, $b, c \in R$

Grafem je **PARABOLA**:
- $\boldsymbol{a > 0}$ otevírá se nahoru
- $\boldsymbol{a < 0}$ otevírá se dolů

Vlastnosti:

- Definiční obor: $D_{(f)} = R$
- Obor hodnot: jiný pro hodnoty koeficientu $a > 0$ a pro hodnoty koeficientu $a < 0$ (***interval***)
- **EXTRÉMY:** určím **MAX** nebo **MIN**
- Monotónnost: na svém definičním oboru není rostoucí, ani klesající (určím intervaly, kdy je **KLESAJÍCÍ** a **ROSTOUCÍ**)
- Parita funkce: není sudá ani lichá (pouze pro hodnotu koeficientu $b = 0$ je kvadratická funkce sudá)
- Prostá: není prostá
- Periodická: není periodická
- Omezenost: pro $a > 0$ je kvadratická funkce omezená zdola a pro $a < 0$ je kvadratická funkce omezená shora

DRUHY kvadratických rovnic:

1) **Obecný tvar kvadratické rovnice:**

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

(pokud $a, b, c \neq 0$, tak se jedná o úplnou kvadratickou rovnici)

2) **Normovaný tvar kvadratické rovnice:**

$$\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$$

$$p = \frac{b}{a} \qquad q = \frac{c}{a}$$

Neúplné kvadratické rovnice:

3) Kvadratická rovnice bez absolutního členu:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$$

(řešíme vytýkáním před závorku)

4) Kvadratická rovnice bez lineárního a absolutního členu:

$$\boldsymbol{ax^2 = 0}$$

(parabola s vrcholem v počátku; funkce je sudá)

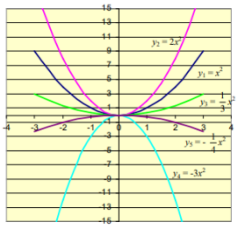
5) Kvadratická rovnice bez lineárního členu – **ryze kvadratická rovnice**:

$$\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$$

(zde je funkce SUDÁ)

Příklad: Načrtni graf funkce a urči její vlastnosti:

1) $f: y = x^2$
2) $g: y = -2x^2$
3) $f: y = 3x^2$
4) * $f: y = 2x^2$
5) * $f: y = -x^2$
6) * $g: y = 4x^2$
7) * $g: y = \frac{1}{4}x^2$



URČENÍ PŘEDPISU KVADRATICKÉ FUNKCE

Postup: $y = ax^2 + bx + c$

- souřadnice bodů doplním do předpisu $y = ax^2 + bx + c$; $A[x; y]$
- vyřeším soustavu 3 rovnic o 3 neznámých
- vypočtené a, b, c dosadím do předpisu $y = ax^2 + bx + c$

Příklady: Urči rovnici kvadratické funkce, jejíž graf prochází body:

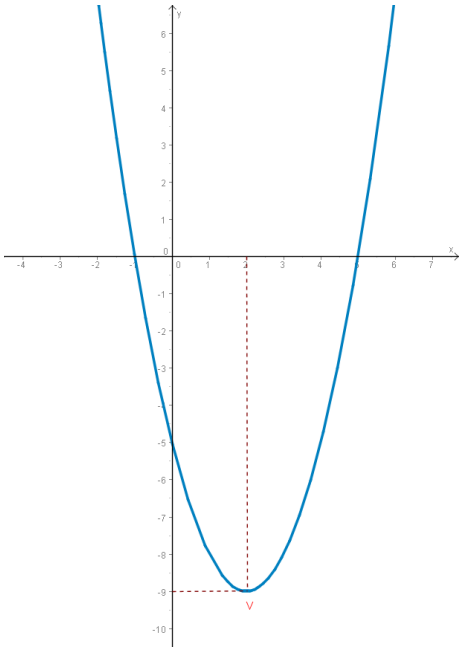
1) $A[2; 3], B[-1; 12], C[0; 7]$
2) $A[1; 2], B[2; 0], C[0; 6]$
3) $A[-2; 26], B[0; 4], C[1; 2]$

DOPLNĚNÍ KVADRATICKÉHO TROJČLENU NA DRUHOU MOCNINU DVOJČLENU (DOPLNĚNÍ NA ČTVEREC)

Postup:

- členy s x uzavřít do závorky; c jen opsat
- z obou členů v závorce vytknout a
- z obou členů v závorce umazat jedno x; lineární člen vydělit dvěma; celou závorku umocnit na druhou
- stranou vypočítat mocninu podle vzorečku a co přebývá, to odečíst (nebo přičíst, u $a < 0$)

$$y = a(x + m)^2 + n \quad \rightarrow \quad V[-m; n]$$



Příklady: Načrtni graf funkce:

1) $f:\ y = x^2 - 4x - 5$

$y = (x^2 - 4x) - 5$

$y = (x - 2)^2 - 4 - 5$ ($x^2 - 4x + 4$)

$y = (x - 2)^2 - 9$ → $V[2; -9]$

2) $g: y = x^2 - 2x + 3$
3) $f: y = x^2 - 4x - 7$
4) $g: y = x^2 - 6x + 9$
5) $g: y = x^2 + 2x - 3$
6) * $f: y = x^2 + 5x + 6$
7) * $f: y = x^2 - x + 6$
8) * $h: y = 3x^2 + 6x + 5$
9) * $h: y = -2x^2 + 12x - 14$
10) * $h: y = 2x^2 - 4x + 4$

Příklady: Doplň výraz na druhou mocninu dvojčlenu ($a < 0$):

1) $f: y = -x^2 - 6x - 8$
2) * $h: y = -x^2 - 2x + 2$

URČENÍ PRŮSEČÍKŮ S OSAMI

(vycházím z původního zadání)

Postup:

- členy s x uzavřít do závorky; c jen opsat
- z obou členů v závorce vytknout a
- z obou členů v závorce umazat jedno x; lineární člen vydělit dvěma; celou závorku umocnit na druhou
- stranou vypočítat mocninu podle vzorečku a co přebývá, to odečíst (nebo přičíst, u $a < 0$)

P_{x_1}, P_{x_2} = průsečík s osou x ; tedy $\boldsymbol{y = 0}$
P_y = průsečík s osou y ; tedy $\boldsymbol{x = 0}$

Příklady: Urči souřadnice V, P_{x_1}, P_{x_2}, P_y a načrtni graf:

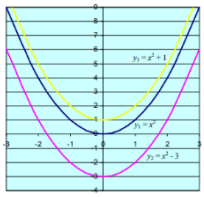
1) $f: y = x^2 - 2x - 8$
2) $f: y = x^2 - 2x - 3$
3) $f: y = x^2 + 5x + 6$
4) $g: y = x^2 + 4x - 5$
5) $g: y = x^2 - 8x + 7$
6) $g: y = x^2 - 4x + 3$

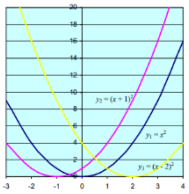
Druhý způsob, jak vypočítat souřadnice vrcholu je přes vzorec:

$$\boldsymbol{V\left[-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right]}$$

Příklady: Urči souřadnice V, P_{x_1}, P_{x_2}, P_y a načrtni graf:

1) * $f: y = x^2 - 3$
2) * $f: y = x^2 + 1$
3) * $g: y = (x + 1)^2$
4) * $g: y = (x - 2)^2$
5) * $h: y = x^2 - 2x$
6) * $h: y = -0{,}5x^2 + 3x$





VYUŽITÍ GRAFŮ KVADRATICKÝCH FUNKCÍ

1) Grafické řešení KVADRATICKÝCH ROVNIC

Grafické řešení kvadratické rovnice spočívá ve dvou možných způsobech řešení:

a) Rozdělení normovaného tvaru kvadratické rovnice na dvě části:

- máme kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$
- upravíme na rovnici ve tvaru $x^2 = \frac{-bx-c}{a}$
- na rovnici se díváme jako na rovnost dvou funkcí
- označme $f: y = x^2$ a $g: y = \frac{-bx-c}{a}$
- sestrojíme grafy funkcí
- grafem bude základní parabola x^2 a přímka
- hledáme průsečíky obou grafů
- mohou nastat 3 situace (2 řešení, 1 řešení nebo žádné řešení)
- podle počtu průsečíků máme počet řešení
- kořeny jsou x-ové souřadnice průsečíků

b) Algebraické řešení kvadratické rovnice – úprava na čtverec:

- jedná se o posouvání grafu kvadratické funkce
- úpravou na čtverec získáme vrchol paraboly
- z vrcholu vedeme parabolu na „obě strany“
- místa, kde parabola protne osu x, jsou naše hledané kořeny
- (*viz kapitola* ***DOPLNĚNÍ KVADRATICKÉHO TROJČLENU NA DRUHOU MOCNINU DVOJČLENU***)

Příklad 1: Řešte graficky kvadratickou rovnici (první metodou):

1) $2x^2 + x - 4 = 0$
2) $x^2 + 2 = 0$
3) $x^2 - 2x + 1 = 0$
4) $0{,}3x^2 - 0{,}9x = 0$
5) $x^2 - 6x + 9 = 0$
6) $-x^2 + 4 = 0$
7) $x^2 - 2x - 3 = 0$

Příklad 2: Řešte graficky neúplné kvadratické rovnice (posouvání grafu):

1) * $x^2 - 121 = 0$
2) * $x^2 + 9 = 0$
3) * $x^2 - 3x = 0$
4) * $6x^2 + 2x = 0$
5) * $2x^2 - 4x = 0$
6) * $x^2 - 9 = 0$
7) * $4x^2 - 25 = 0$
8) * $x^2 + 36 = 0$
9) * $x^2 + 5x = 0$
10) * $x^2 - 7x = 0$
11) * $4x^2 + 6x = 0$

2) **Grafické řešení KVADRATICKÝCH NEROVNIC**

Grafické řešení kvadratické nerovnice spočívá na obdobném principu jako tomu je u grafického řešení kvadratické rovnice. Lze opět použít dvou možných způsobů řešení:

a) **Rozdělení normovaného tvaru kvadratické nerovnice na dvě části**

b) **Algebraické řešení kvadratické nerovnice – úprava na čtverec**

Postup:

- nerovnici převést na anulovaný tvar
- vypočítat kořeny kvadratické ROVNICE (průsečíky s osou x)
- určit směr a umístění paraboly
- zapíšu, pro která x je splněna daná nerovnice

(je-li D záporný, nemá funkce žádný průsečík s osou x, přesto může být nerovnost splněna, pak $x \in R$)

Příklad: Řešte graficky kvadratickou nerovnici:

1) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$
2) $-x^2 - x + 6 \leq 0$
3) $x^2 + 4x + 3 < 0$
4) $x^2 + 2x - 3 > 0$
5) $2x^2 - 6x - 20 \leq 0$